

Επίλυση μη-γραμμικών προβλημάτων της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου

Γεώργιος Χ. Τσιάτας

Αναπλ. Καθηγητής, Πανεπιστημίου Πατρών
Δρ. Πολ. Μηχ. Ε.Μ.Π.,
M.Sc. and Diploma of Imperial College,
Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης Ε.Μ.Π.

Διάλεξη στο 26^ο Θερινό Σχολείο – Συνέδριο
«Δυναμικά Συστήματα και Πολυπλοκότητα»
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 14-20/7/2019

Βασικά σημεία της παρουσίασης

1. Ο Λογισμός των Μεταβολών σε προβλήματα της Μηχανικής
2. Μη γραμμική ανάλυση χωρικών μεμβρανών
3. Μη γραμμική δυναμική ευστάθεια στύλων μεταβλητής διατομής
4. Μη γραμμική ανάλυση τόξων μεταβλητής δυσκαμψίας
5. Ελαστοπλαστική ανάλυση ράβδων από Λειτουργικά Διαβαθμισμένα Υλικά (Functionally Graded Materials) υπό στρεπτική φόρτιση

Ο Λογισμός των Μεταβολών σε προβλήματα της Μηχανικής

Ορισμένες αρχές, που ονομάζονται **ενεργειακές αρχές** ή **παραλλακτικές αρχές** (variational principles), παίζουν βασικό ρόλο στη μελέτη των κατασκευών και πιο γενικά στη μελέτη των παραμορφώσιμων σωμάτων. Τέτοιες είναι η **αρχή των δυνατών έργων**, η **αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας**, η **αρχή του Hamilton για τη δυναμική**.

Το **βασικό πλεονέκτημα των ενεργειακών αρχών και μεθόδων** είναι ότι ανάγουν το πρόβλημα της **στατικής και δυναμικής ισορροπίας** των παραμορφώσιμων σωμάτων από διανυσματικό πρόβλημα (σύνθεση δυνάμεων – ροπών) σε πρόβλημα βαθμωτών μεγεθών (έργο εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων).

Η **μαθηματική διατύπωση των αρχών αυτών** οδηγεί στην αναζήτηση μίας ή περισσοτέρων αγνώστων συναρτήσεων, μίας ή περισσοτέρων μεταβλητών που κάνουν **στάσιμη την τιμή ενός συγκεκριμένου συναρτησιακού**.

Το **συναρτησιακό αυτό γενικά είναι μια συνάρτηση των αγνώστων συναρτήσεων και των παραγώγων τους** (π.χ. η δυναμική ενέργεια είναι ένα συναρτησιακό του οποίου η τιμή εξαρτάται από την εκλογή των συναρτήσεων $u_1(x_1, x_2, x_3)$, $u_2(x_1, x_2, x_3)$, $u_3(x_1, x_2, x_3)$) και ανήκει σε μια οικογένεια **αποδεκτών μετατοπίσεων** που ικανοποιούν τις **συνοριακές συνθήκες** του προβλήματος.

Η αρχή της **ελάχιστης δυναμικής ενέργειας** ορίζει ότι οι συναρτήσεις εκείνες που κάνουν **ελάχιστη την τιμή του συναρτησιακού** αποτελούν τις πραγματικές μετατοπίσεις του σώματος.

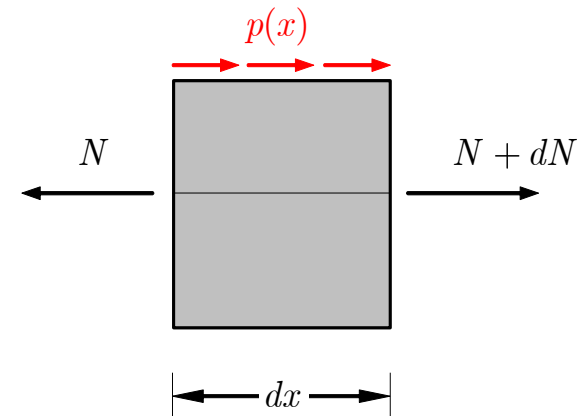
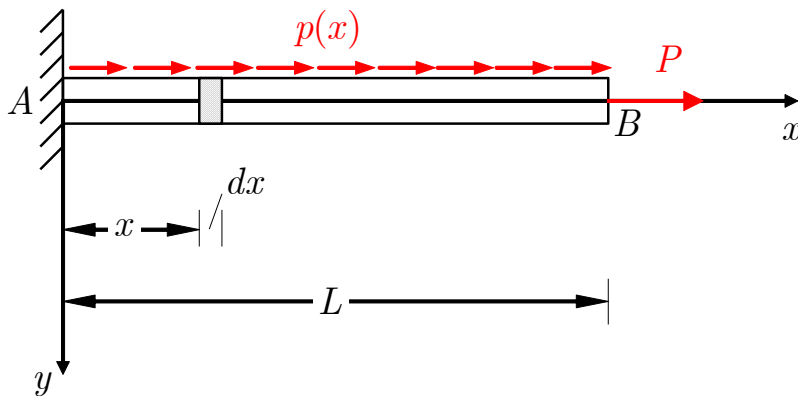
...ο Λογισμός των Μεταβολών σε προβλήματα της Μηχανικής

Ο **συνήθης τρόπος διατύπωσης των διαφορικών εξισώσεων** που διέπουν τη συμπεριφορά ενός σώματος είναι η **αποκοπή σε τυχαία θέση** ενός απειροστού τμήματος του σώματος επί του οποίου εφαρμόζονται οι εξωτερικές και εσωτερικές δυνάμεις καθώς και η μεταβολή τους για στοιχειώδη επαύξηση.

Επί του **απειροστού τμήματος εφαρμόζονται οι απαιτήσεις στατικής ή δυναμικής ισορροπίας**. Οι εσωτερικές δυνάμεις προσδιορίζονται από ορισμούς αλλά και παραδοχές που αναφέρονται στο πεδίο των μετακινήσεων και τον καταστατικό νόμο του υλικού.

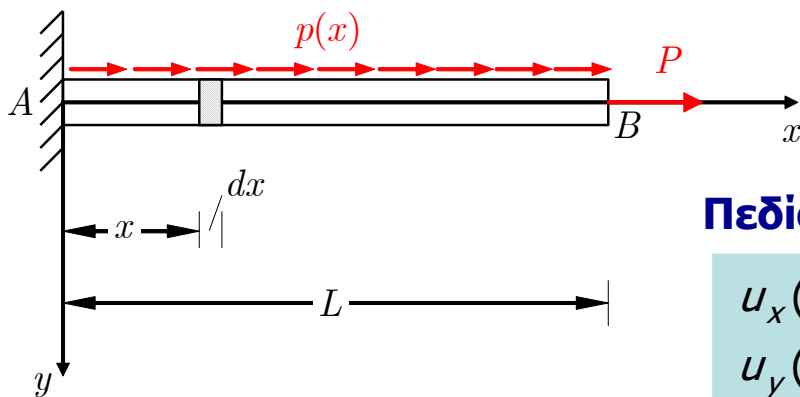
Με τον τρόπο αυτό διατυπώνονται **οι διαφορικές εξισώσεις** που διέπουν το πρόβλημα και η διατύπωση των **συνοριακών συνθηκών** προκύπτει από τη φύση του προβλήματος.

Αξονική παραμόρφωση ράβδου



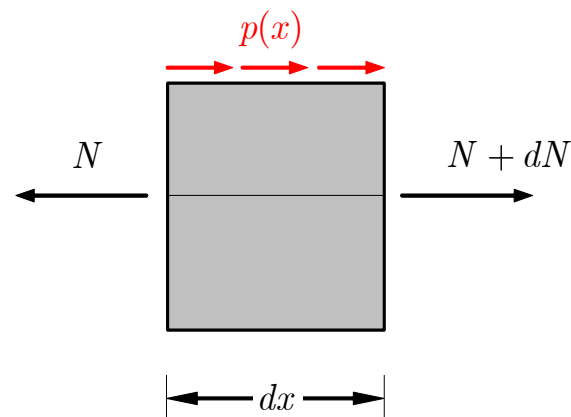
...ο Λογισμός των Μεταβολών σε προβλήματα της Μηχανικής

Ας θεωρήσουμε μία ράβδο μήκους L , με μέτρο ελαστικότητας E και εμβαδόν διατομής A . Η ράβδος είναι πακτωμένη στο άκρο $x=0$ και υπόκειται σε ένα κατανεμημένο φορτίο $p(x)$ και μια συγκεντρωμένη δύναμη P στο άκρο $x=L$.



Πεδίο μετακινήσεων

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u(x) \\ u_y(x, y, z) &= 0 \\ u_z(x, y, z) &= 0 \end{aligned}$$



Εξίσωση ισορροπίας συναρτήσει των εντατικών μεγεθών

$$(N + dN) - N + p dx = 0 \Rightarrow \frac{dN}{dx} = -p$$

Εξίσωση ισορροπίας συναρτήσει των μετατοπίσεων

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = -p$$

Συνοριακές συνθήκες:

$$u(0) = 0$$

$$N(L) = P$$

κινηματική

φυσική

Νόμος Hooke (1660)

«*ut tensio, sic vis*»

$$\sigma = E \varepsilon$$

$$\frac{N}{A} = E \frac{du}{dx} \Rightarrow N = EA \frac{du}{dx}$$

Συνοριακές συνθήκες:

$$u(0) = 0$$

$$\left(EA \frac{du}{dx} \right)_{x=L} = P$$

κινηματική

φυσική

...ο Λογισμός των Μεταβολών σε προβλήματα της Μηχανικής

Πολλές φορές η **διατύπωση των συνοριακών συνθηκών** με **βάση τη φυσική συμπεριφορά** συμβαίνει να μην είναι συμβατή με τις παραδοχές του προβλήματος και να ισοδυναμεί με απώλειες ενέργειας. Προκύπτει έτσι η ανάγκη προσφυγής σε μια **μεθοδολογία** που να **παράγει αφενός τις διαφορικές εξισώσεις του προβλήματος** αλλά παράλληλα και το **σύνολο των αποδεκτών συνοριακών συνθηκών ή αρχικών συνθηκών** που είναι ενεργειακά συμβατές με τις παραδοχές της συγκεκριμένης θεώρησης.
Τη μεθοδολογία αυτή προσφέρει ο Λογισμός των Μεταβολών.

Η **ολική δυναμική ενέργεια** του προβλήματος της αξονικής παραμόρφωσης της ράβδου

$$\Pi = U - W$$

όπου **U** είναι η **ενέργεια παραμόρφωσης**

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_0^L EA \varepsilon^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx$$

και **W** το **έργο των εξωτερικών δυνάμεων**

$$W = \int_0^L p u dx + P u(L)$$

και η **πρώτη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας** δίνει

$$\delta \Pi = \int_0^L \left[EA \frac{du}{dx} \left(\frac{d\delta u}{dx} \right) - p \delta u \right] dx - P \delta u(L)$$

...ο Λογισμός των Μεταβολών σε προβλήματα της Μηχανικής

Ολοκληρώνοντας τον πρώτο όρο κατά μέλη, η πρώτη μεταβολή λαμβάνει τη μορφή

$$\delta\Pi = \int_0^L \left[-\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) - p \right] \delta u dx + \delta u(L) \left[\left(EA \frac{du}{dx} \right)_{x=L} - P \right] - \delta u(0) \left(EA \frac{du}{dx} \right)_{x=0}$$

όπου ο τελευταίος όρος είναι μηδέν διότι **$\delta u(0) = 0$**

Η αρχή της **ελάχιστης ολικής δυναμικής ενέργειας** απαιτεί το μηδενισμό της πρώτης μεταβολής

$$\delta\Pi = \int_0^L \left[-\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) - p \right] \delta u dx + \delta u(L) \left[\left(EA \frac{du}{dx} \right)_{x=L} - P \right] = 0$$

η οποία δίνει την **εξίσωση ισορροπίας της ράβδου** στο διάστημα **(0,L)**

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = -p$$

Συνοριακές συνθήκες:

$$u(0) = 0$$

κινηματική

$$\left(EA \frac{du}{dx} \right)_{x=L} = P$$

φυσική

...ο Λογισμός των Μεταβολών σε προβλήματα της Μηχανικής

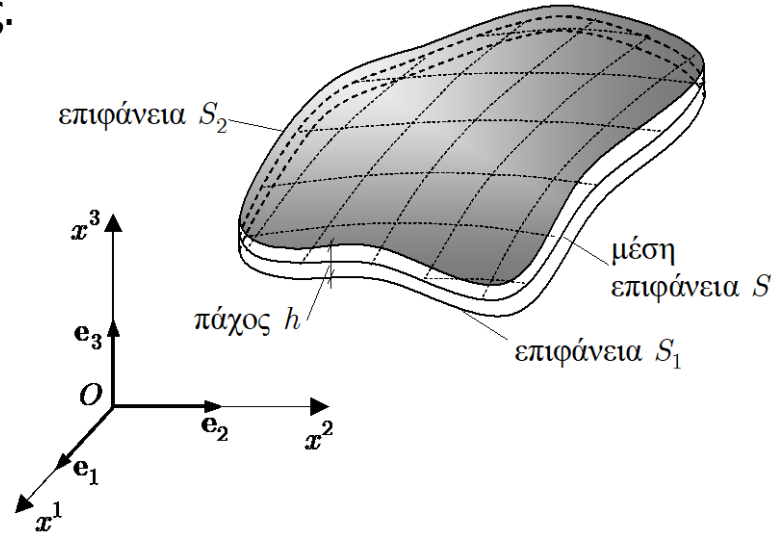
Στις απλές θεωρίες της **Μηχανικής του Παραμορφώσιμου Σώματος** η **διανυσματική μέθοδος** δίνει χωρίς δυσκολίες τα σωστά αποτελέσματα, αλλά σε συνθετότερες θεωρίες με αποκορύφωμα τις **θεωρίες κελυφών** η παραγωγή των αποδεκτών συνοριακών συνθηκών είναι αδύνατη με βάση τη φυσική εποπτεία.

Στις περιπτώσεις αυτές ο **Λογισμός των Μεταβολών** αποδεικνύεται το αλάνθαστο συστηματικό μέσο για την **παραγωγή των διαφορικών εξισώσεων** και του συνόλου των **αποδεκτών συνοριακών συνθηκών**. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ότι από τις περίπου πενήντα θεωρίες κελυφών που είχαν διατυπωθεί στη δεκαετία του 1960 λιγότερες από επτά ήταν συμβατές με τις παραδοχές τους.

Τέλος, **οι ενεργειακές μέθοδοι** μπορούν να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά και στην εύρεση προσεγγιστικών λύσεων. Η μέθοδος **Rayleigh-Ritz**, και η **μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων** είναι δύο πολύ διαδεδομένες ενεργειακές μέθοδοι για την εύρεση προσεγγιστικών λύσεων.

Μη γραμμική ανάλυση μεμβρανών

Μεμβράνη είναι ένας πολύ **λεπτός ελαστικός καμπύλος φορέας** που περικλείεται από δύο καμπύλες επιφάνειες S_1, S_2 . Η απόσταση μεταξύ των S_1, S_2 καλείται πάχος της μεμβράνης ενώ τα σημεία που ισαπέχουν από τις S_1, S_2 ορίζουν μια επιφάνεια S η οποία καλείται μέση επιφάνεια της μεμβράνης.

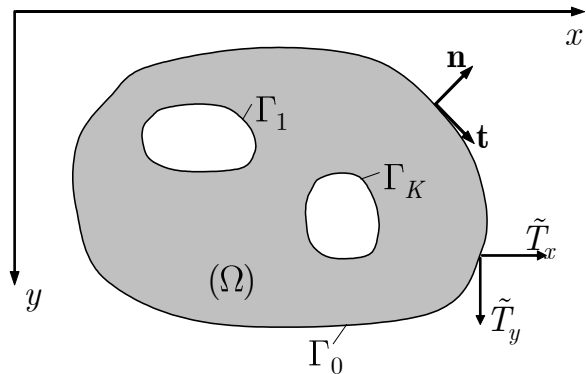


Δύο θεμελιώδεις παραδοχές

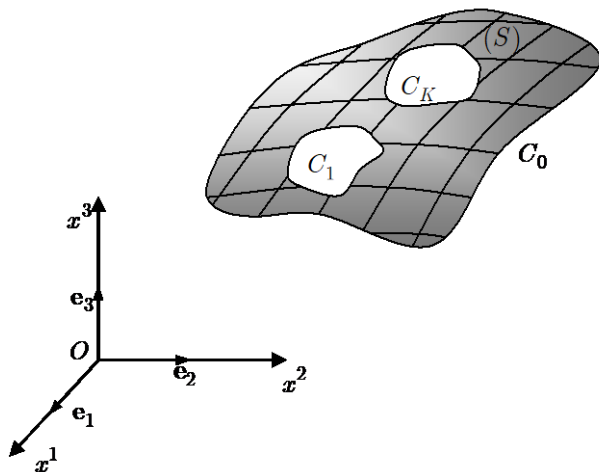
(i) Όλες οι επιφάνειες οι οποίες είναι παράλληλες προς τη μέση επιφάνεια της μεμβράνης έχουν την ίδια γεωμετρία με αυτή και συνεπώς η παραμόρφωση του τρισδιάστατου σώματος περιγράφεται πλήρως από την παραμόρφωση της μέσης επιφάνειας

(ii) Η **μεμβρανική ακαμψία** είναι πολύ μεγαλύτερη από την καμπτική με αποτέλεσμα τα εξωτερικά φορτία που ασκούνται στο σώμα **να παραλαμβάνονται κυρίως από τις μεμβρανικές δυνάμεις**. Συνεπώς, η συμβολή των διατμητικών δυνάμεων και ροπών στην παραλαβή του φορτίου είναι αμελητέα

...μη γραμμική ανάλυση μεμβρανών



Επίπεδη μεμβράνη τυχόντος σχήματος.



Χωρική μεμβράνη τυχόντος σχήματος.

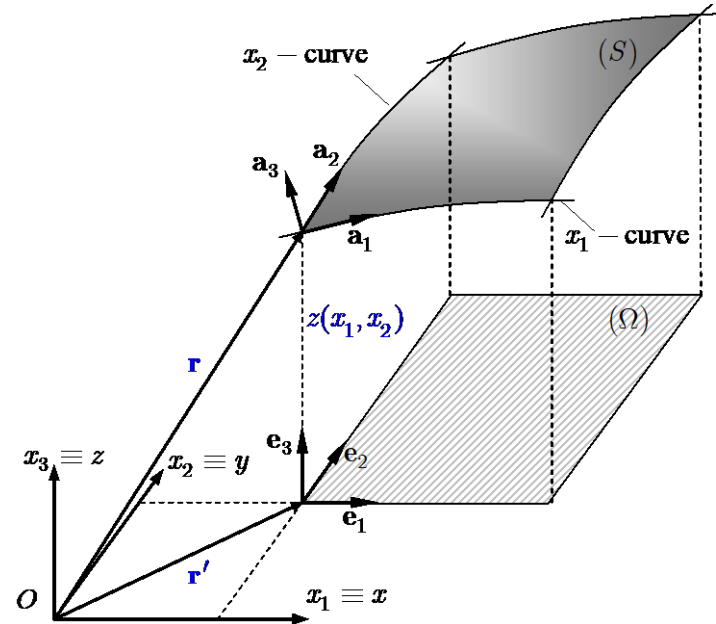
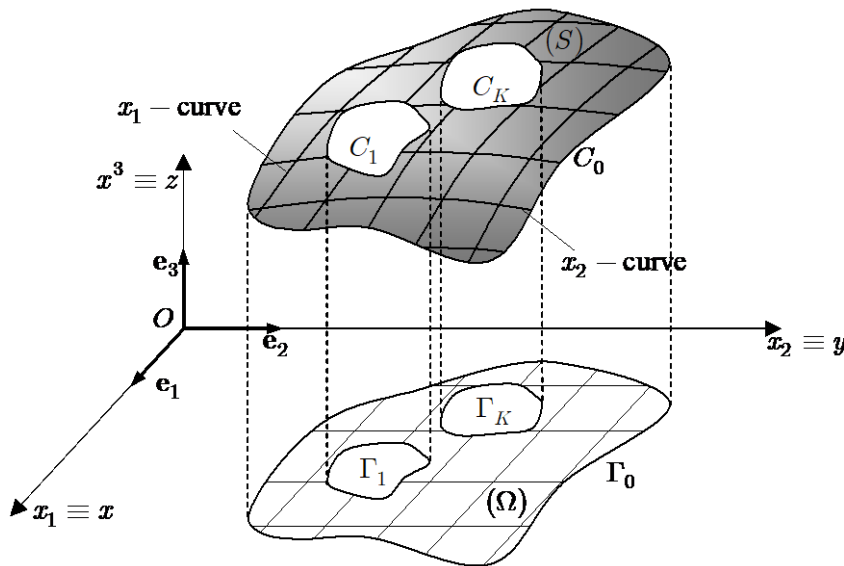
Μη γραμμική ανάλυση χωρικών μεμβρανών (Tsiatas and Katsikadelis, 2006a; 2006b; 2011)

Θεωρούμε μία **χωρική μεμβράνη** η μέση επιφάνεια της οποίας στην αρχική απαραμόρφωτη κατάστασή της καταλαμβάνει την επιφάνεια **S** η οποία μπορεί να είναι πολλαπλώς συνεκτική και περιβάλλεται από το σύνορο **C**. Η επιφάνεια **S** προβάλλεται στο επίπεδο x_1x_2 , δημιουργώντας το χωρίο Ω που περιβάλλεται από την καμπύλη Γ το σύνορο του χωρίου. Γ_i είναι οι προβολές των C_i .

Εάν \mathbf{r}' είναι το διάνυσμα θέσης ενός τυχαίου σημείου στο χωρίο Ω και \mathbf{r} το αντίστοιχο στην επιφάνεια **S**, τότε ισχύει

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + z(x_1, x_2)\mathbf{e}_3 = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + z(x_1, x_2)\mathbf{e}_3$$

όπου $z(x_1, x_2)$ είναι η **εξίσωση της επιφάνειας σε καρτεσιανές συντεταγμένες**.



... μη γραμμική ανάλυση χωρικών μεμβρανών

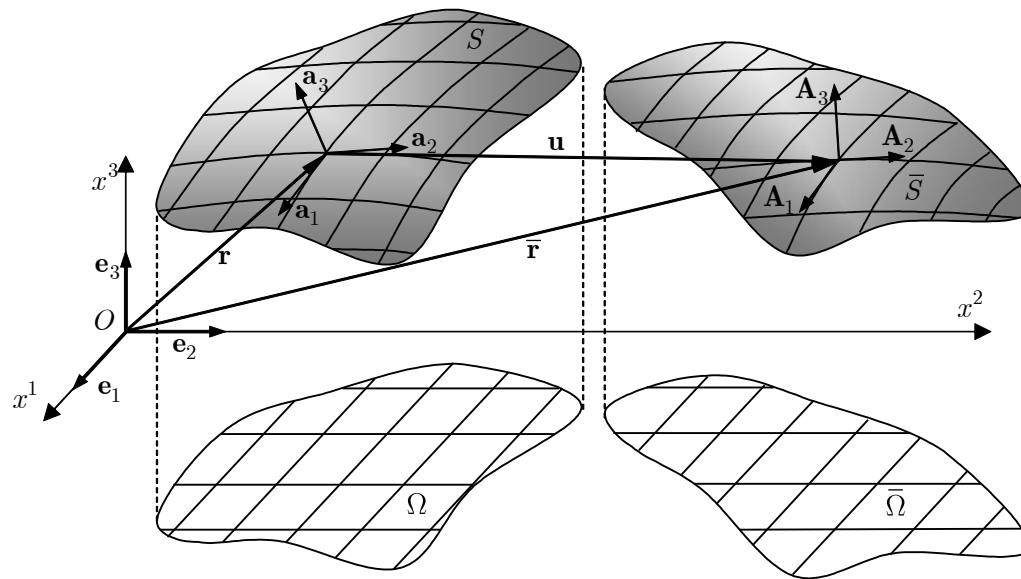
Το διάνυσμα μετατόπισης \mathbf{u} μπορεί να αναλυθεί στο:

$$\mathbf{u} = u^1 \mathbf{a}_1 + u^2 \mathbf{a}_2 + u^3 \mathbf{a}_3$$

συναλλοίωτο σύστημα συντεταγμένων

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3$$

καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων



Οι παραπάνω δύο εκφράσεις του διανύσματος της μετατόπισης οδηγούν σε δύο διαφορετικές διατυπώσεις του προβλήματος. Στην πρώτη, οι προκύπτουσες εξισώσεις είναι **πολύπλοκες** διότι αναφέρονται στο γενικό καμπυλόγραμμο σύστημα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Στη δεύτερη, είναι σημαντικά πιο **απλές** διότι αναφέρονται στο καρτεσιανό σύστημα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ και η ολοκλήρωση τους γίνεται στο επίπεδο χωρίο που προκύπτει από την προβολή της επιφάνειας της μεμβράνης στο επίπεδο $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$. Η τελευταία διατύπωση χρησιμοποιείται στην εργασία.

... μη γραμμική ανάλυση χωρικών μεμβρανών

Τα συναλλοίωτα διανύσματα βάσης και οι συναλλοίωτες συνιστώσες του συμμετρικού **μετρικού τανυστή της παραμορφωμένης επιφάνειας** δίδονται ως

$$\mathbf{A}_\alpha = \bar{\mathbf{r}}_{,\alpha} = \mathbf{r}_{,\alpha} + \mathbf{u}_{,\alpha} = \mathbf{a}_\alpha + \mathbf{u}_{,\alpha}$$

$$A_{\alpha\beta} = \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta$$

$$\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha + z_{,\alpha} \mathbf{e}_3 + u_{\mu,\alpha} \mathbf{e}_\mu + w_{,\alpha} \mathbf{e}_3$$

$$= \delta_{\mu\alpha} + u_{\mu,\alpha} \mathbf{e}_\mu + w_{,\alpha} + z_{,\alpha} \mathbf{e}_3$$

$$A_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{\mu,\alpha} u_{\mu,\beta} + w_{,\alpha} + z_{,\alpha} w_{,\beta} + z_{,\beta}$$

Τανυστής τροπών της μεμβράνης - Σχέσεις τροπών-μετατοπίσεων

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} A_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + z_{,\alpha} w_{,\beta} + z_{,\beta} w_{,\alpha} + w_{,\alpha} w_{,\beta}$$

Θεωρία μετρίων μεγάλων παραμορφώσεων

$$\varepsilon_x \equiv \varepsilon_{11} = u_{,x} + z_{,x} w_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \quad \varepsilon_x \equiv \varepsilon_{11} = u_{,x} + z_{,x} w_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2$$

$$\gamma_{xy} \equiv 2\varepsilon_{12} = u_{,y} + v_{,x} + z_{,x} w_{,y} + z_{,y} w_{,x} + w_{,x} w_{,y}$$

... μη γραμμική ανάλυση χωρικών μεμβρανών

Σχέσεις μεμβρανικών δυνάμεων-παραμορφώσεων

$$N^{\alpha\beta} = \sqrt{a}D \frac{1}{2} \left[(1-\nu) a^{\alpha\lambda} a^{\beta\rho} + a^{\alpha\rho} a^{\beta\lambda} + 2\nu a^{\alpha\beta} a^{\rho\lambda} \right] \varepsilon_{\rho\lambda} = \sqrt{a}DH^{\alpha\beta\rho\lambda} \varepsilon_{\rho\lambda}$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$C_{11} = D \frac{1 + z_{,y}^2}{1 + z_{,x}^2 + z_{,y}^2}^{3/2}$$

$$C_{12} = D \frac{z_{,x}^2 z_{,y}^2 + \nu (1 + z_{,x}^2 + z_{,y}^2)}{1 + z_{,x}^2 + z_{,y}^2}^{3/2}$$

$$C_{21} = C_{12}$$

$$C_{13} = -D \frac{1 + z_{,y}^2}{1 + z_{,x}^2 + z_{,y}^2}^{3/2} z_{,x} z_{,y}$$

$$C_{22} = D \frac{1 + z_{,x}^2}{1 + z_{,x}^2 + z_{,y}^2}^{3/2}$$

$$C_{31} = C_{13}$$

$$C_{23} = -D \frac{1 + z_{,x}^2}{1 + z_{,x}^2 + z_{,y}^2}^{3/2} z_{,x} z_{,y}$$

$$C_{33} = D \frac{2z_{,x}^2 z_{,y}^2 + 1 - \nu (1 + z_{,x}^2 + z_{,y}^2)}{2(1 + z_{,x}^2 + z_{,y}^2)}^{3/2}$$

$$C_{32} = C_{23}$$

... μη γραμμική ανάλυση χωρικών μεμβρανών

Εξισώσεις ισορροπίας της μεμβράνης

Ολικό δυναμικό της παραμορφωμένης μεμβράνης

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy} d\Omega - \int_{\Omega} p_x u + p_y v + p_z w d\Omega - \int_{\Gamma} \tilde{T}_x u + \tilde{T}_y v + \tilde{T}_z w ds$$

Η στάσιμη τιμή του συναρτησιακού της ολικής δυναμικής ενέργειας απαιτεί το μηδενισμό της πρώτης μεταβολής του, **$\delta\Pi=0$** , η οποία παράγει τις **εξισώσεις ισορροπίας** μέσα στο χωρίο Ω

$$N_{x,x} + N_{xy,y} + p_x = 0$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} + p_y = 0$$

$$N_x z_{,xx} + w_{,xx} + 2N_{xy} z_{,xy} + w_{,xy} + N_y z_{,yy} + w_{,yy} = -p_z + p_x z_{,x} + w_{,x} + p_y z_{,y} + w_{,y}$$

καθώς και τις **συνοριακές συνθήκες** επάνω στο σύνορο Γ

$$T_x = \tilde{T}_x$$

$$T_y = \tilde{T}_y$$

$$T_x w_{,x} + z_{,x} + T_y w_{,y} + z_{,y} = \tilde{T}_z$$

φυσικές (natural)

ή

$$u = \tilde{u}$$

$$v = \tilde{v}$$

$$w = \tilde{w}$$

κινηματικές (kinematical)

... μη γραμμική ανάλυση χωρικών μεμβρανών

$$\left[C_{11} u_{,x} + z_{,x} w_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + C_{12} v_{,y} + z_{,y} w_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + C_{13} u_{,y} + v_{,x} + z_{,x} w_{,y} + z_{,y} w_{,x} + w_{,x} w_{,y} \right]_{,x} + \left[C_{13} u_{,x} + z_{,x} w_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + C_{23} v_{,y} + z_{,y} w_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + C_{33} u_{,y} + v_{,x} + z_{,x} w_{,y} + z_{,y} w_{,x} + w_{,x} w_{,y} \right]_{,y} = -p_x$$

$$\left[C_{13} u_{,x} + z_{,x} w_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + C_{23} v_{,y} + z_{,y} w_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + C_{33} u_{,y} + v_{,x} + z_{,x} w_{,y} + z_{,y} w_{,x} + w_{,x} w_{,y} \right]_{,x} + \left[C_{12} u_{,x} + z_{,x} w_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + C_{22} v_{,y} + z_{,y} w_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + C_{23} u_{,y} + v_{,x} + z_{,x} w_{,y} + z_{,y} w_{,x} + w_{,x} w_{,y} \right]_{,y} = -p_y$$

$$\left[C_{11} u_{,x} + z_{,x} w_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + C_{12} v_{,y} + z_{,y} w_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + C_{13} u_{,y} + v_{,x} + z_{,x} w_{,y} + z_{,y} w_{,x} + w_{,x} w_{,y} \right] z_{,xx} + w_{,xx} + 2 \left[C_{13} u_{,x} + z_{,x} w_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + C_{23} v_{,y} + z_{,y} w_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 + C_{33} u_{,y} + v_{,x} + z_{,x} w_{,y} + z_{,y} w_{,x} + w_{,x} w_{,y} \right] z_{,xy} + w_{,xy} + \left[C_{12} u_{,x} + z_{,x} w_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + C_{22} (v_{,y} + z_{,y} w_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2) + C_{23} (u_{,y} + v_{,x} + z_{,x} w_{,y} + z_{,y} w_{,x} + w_{,x} w_{,y}) \right] (z_{,yy} + w_{,yy}) = -p_z + p_x (z_{,x} + w_{,x}) - p_y (z_{,y} + w_{,y})$$

Πρόβλημα συνοριακών τιμών

Εξισώσεις ισορροπίας συναρτήσεων μετατοπίσεων μέσα στο χωρίο της μεμβράνης Ω

Συνοριακές συνθήκες επάνω στο σύνορο της μεμβράνης Γ

$$T_x = \tilde{T}_x$$

$$T_y = \tilde{T}_y$$

$$T_x w_{,x} + z_{,x} T_y + T_y w_{,y} + z_{,y} = \tilde{T}_z$$

ή $u = \tilde{u}$

$$v = \tilde{v}$$

$$w = \tilde{w}$$

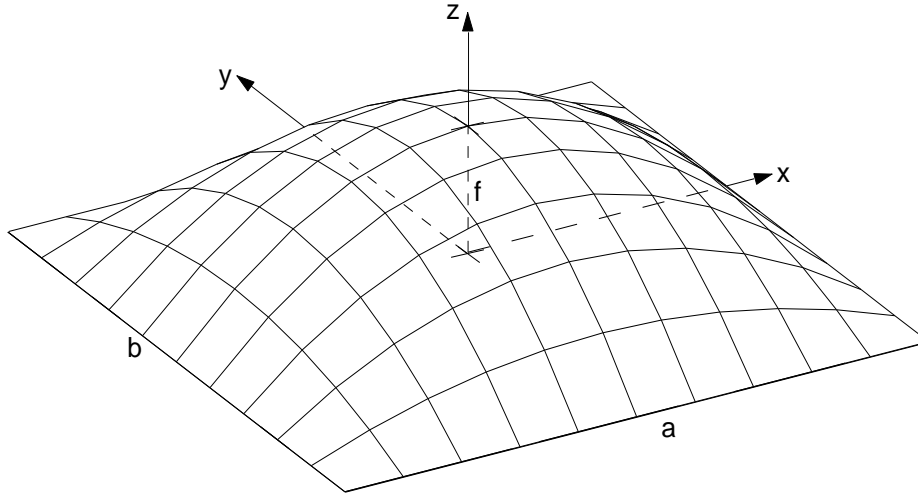
... μη γραμμική ανάλυση χωρικών μεμβρανών

Στάδια επίλυσης της μεμβράνης

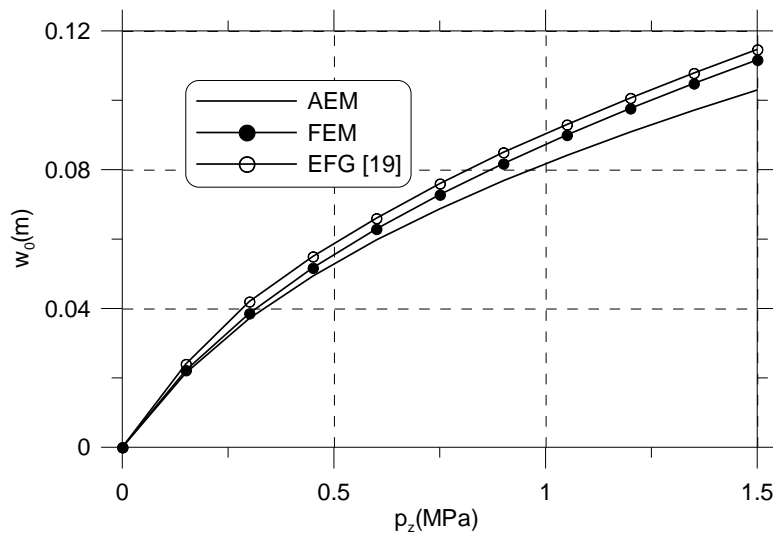
- (i) **Προσδιορισμός της αρχικής επιφάνειας.** Η επιφάνεια αυτή είναι άγνωστη. Ως καταλληλότερη λαμβάνεται η λύση του προβλήματος της **ελάχιστης επιφάνειας**, δηλαδή η επιφάνεια με το μικρότερο εμβαδόν η οποία διέρχεται από μία ή περισσότερες καμπύλες στο χώρο.
- (ii) **Επιβολή της προέντασης και του μόνιμου φορτίου.** Στη φάση αυτή επαναπροσδιορίζεται η επιφάνεια της μεμβράνης λαμβάνοντας υπόψη τις καταστατικές εξισώσεις του υλικού της.
- (iii) **Επιβολή των φορτίων λειτουργίας.** Προσδιορίζεται η τελική επιφάνεια της μεμβράνης καθώς και η εντατική της κατάσταση.

... μη γραμμική ανάλυση χωρικών μεμβρανών

Παραβολική μεμβράνη



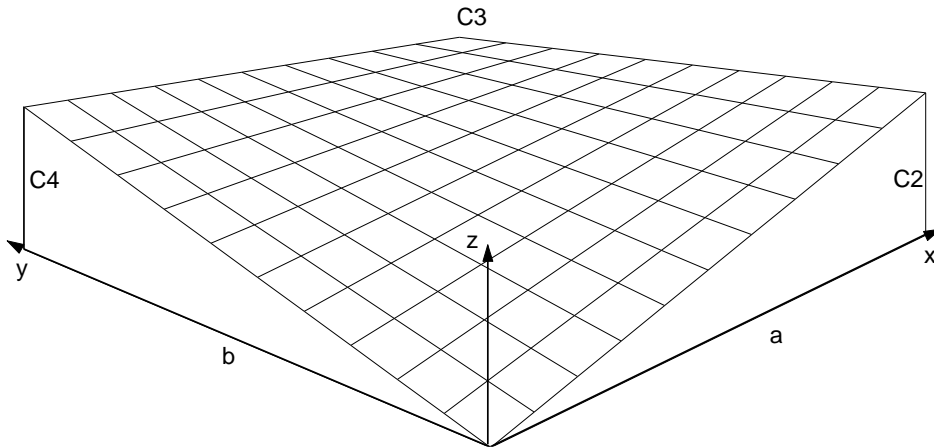
Γεωμετρία της μεμβράνης



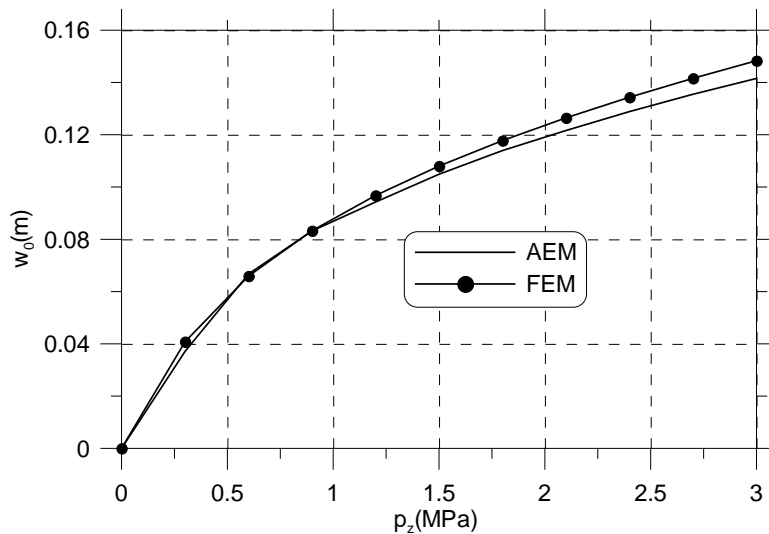
Καμπύλη βύθισης φορτίου

... μη γραμμική ανάλυση χωρικών μεμβρανών

Υπερβολική παραβολοειδής μεμβράνη



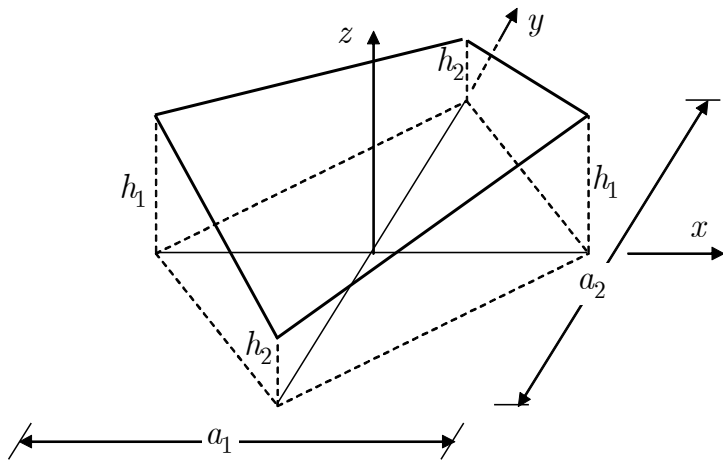
Γεωμετρία της μεμβράνης



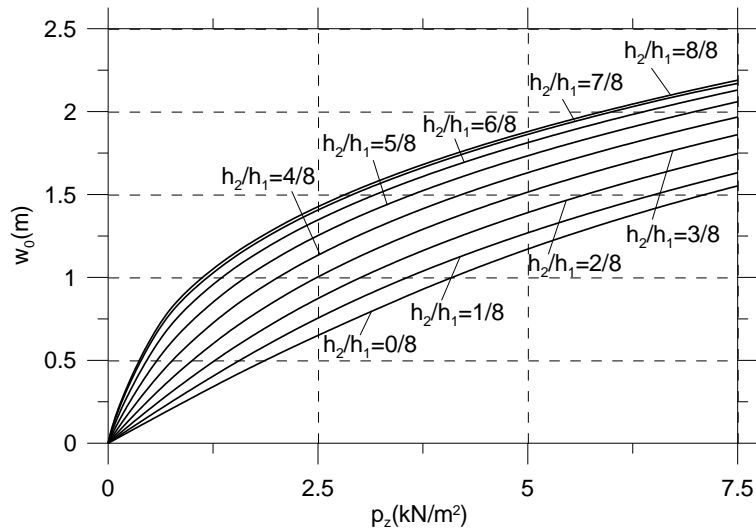
Καμπύλη βύθισης φορτίου

... μη γραμμική ανάλυση χωρικών μεμβρανών

Μεμβράνη με ρομβοειδή κάτοψη



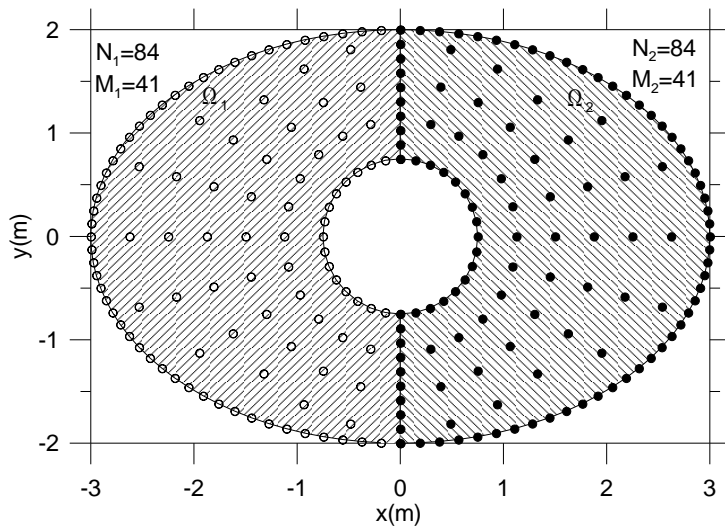
Γεωμετρία της μεμβράνης



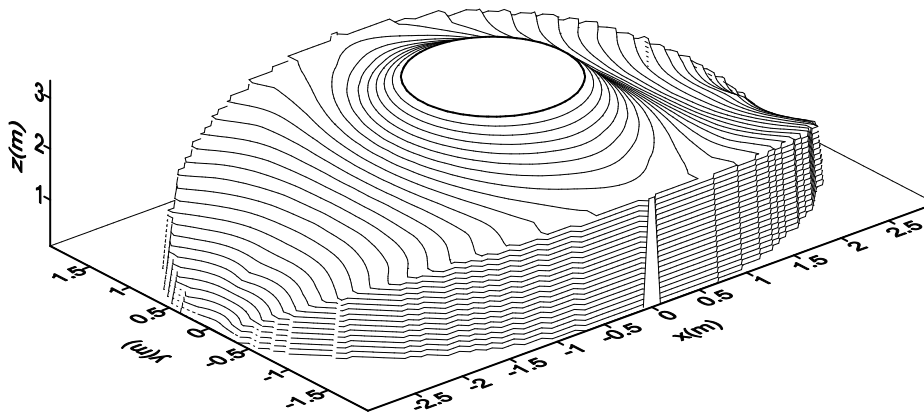
Καμπύλη βύθισης φορτίου

... μη γραμμική ανάλυση χωρικών μεμβρανών

Ελλειπτική μεμβράνη με κεντρικά υπερυψωμένο κυκλικό δακτύλιο

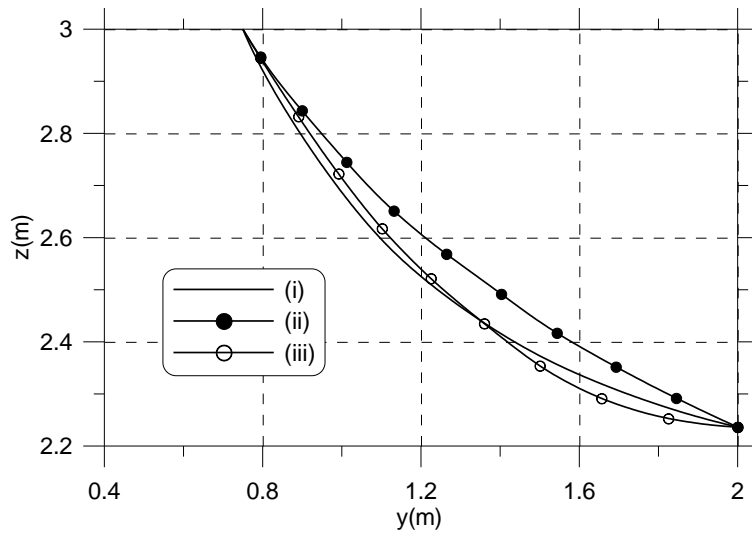


Γεωμετρία της μεμβράνης

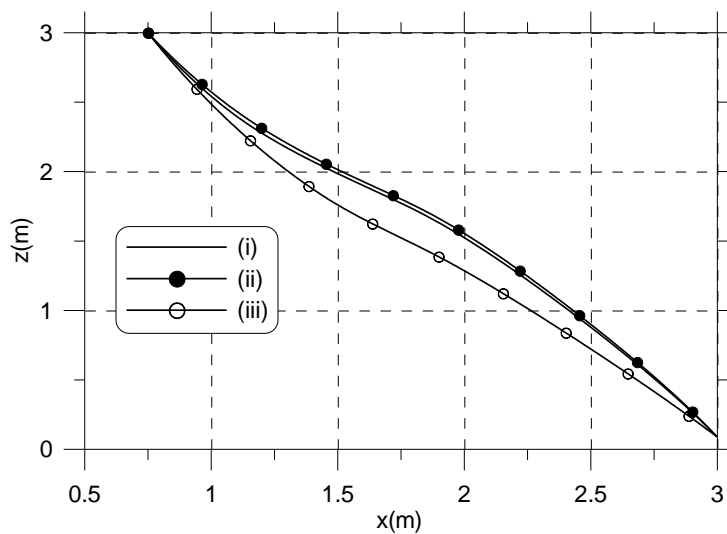


Παραμορφωμένη μεμβράνη

... μη γραμμική ανάλυση χωρικών μεμβρανών



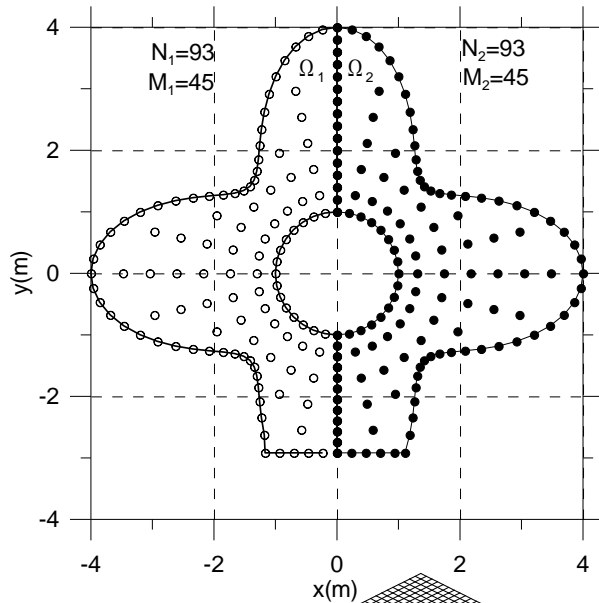
Προφίλ της μεμβράνης στη διατομή $x=0$



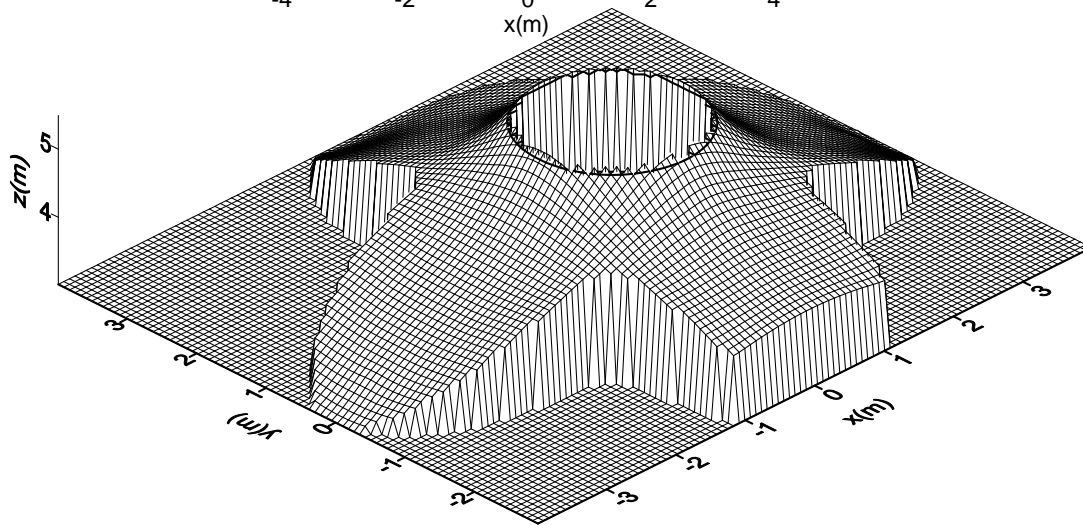
Προφίλ της μεμβράνης στη διατομή $y=0$

... μη γραμμική ανάλυση χωρικών μεμβρανών

Μεμβράνη σε σχήμα αποκοπτόμενου σταυρού με κεντρικά υπερυψωμένο κυκλικό δακτύλιο

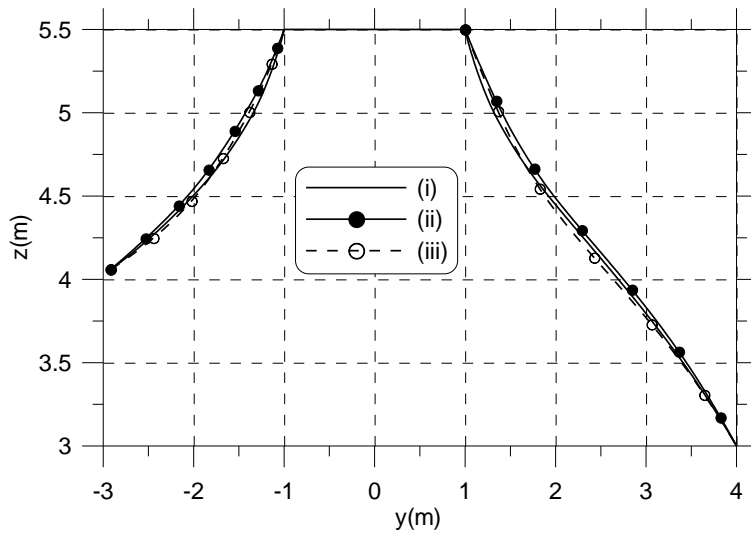


Γεωμετρία της μεμβράνης

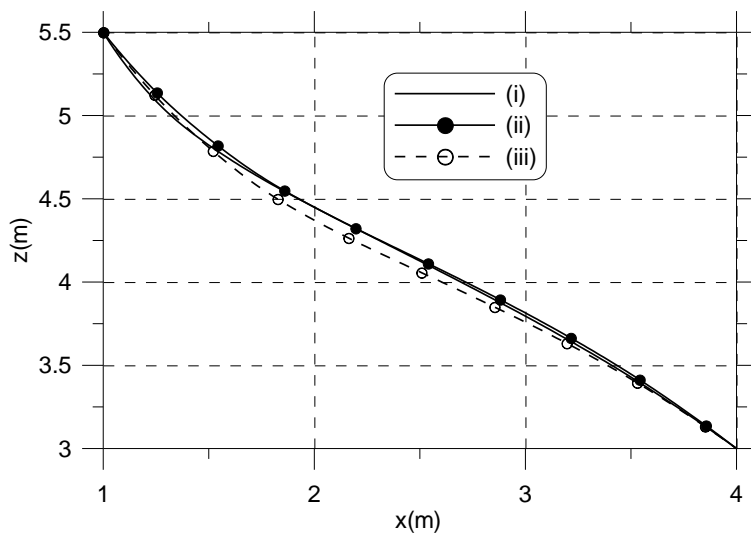


Παραμορφωμένη μεμβράνη

... μη γραμμική ανάλυση χωρικών μεμβρανών



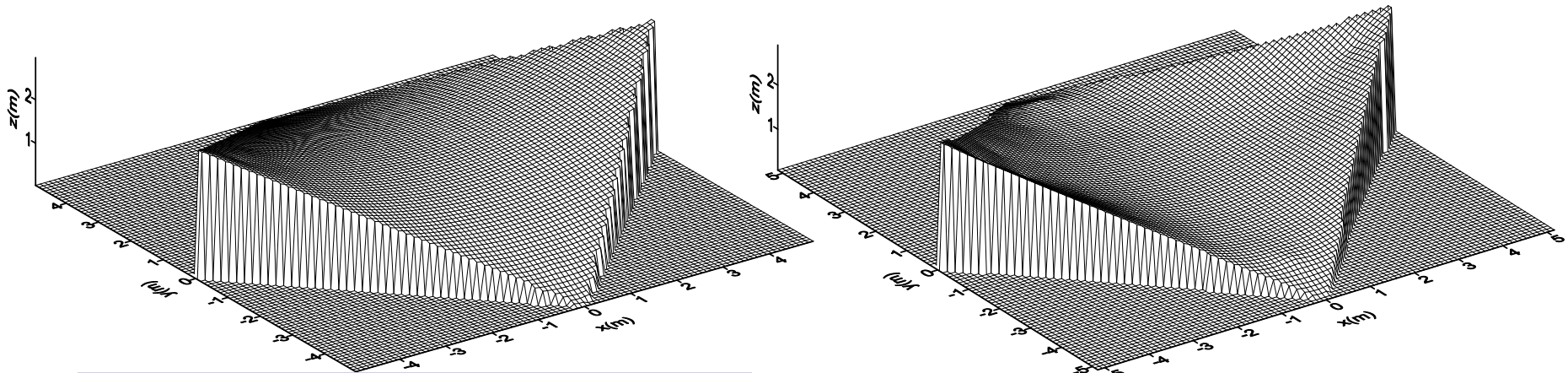
Προφίλ της μεμβράνης στη διατομή $x=0$



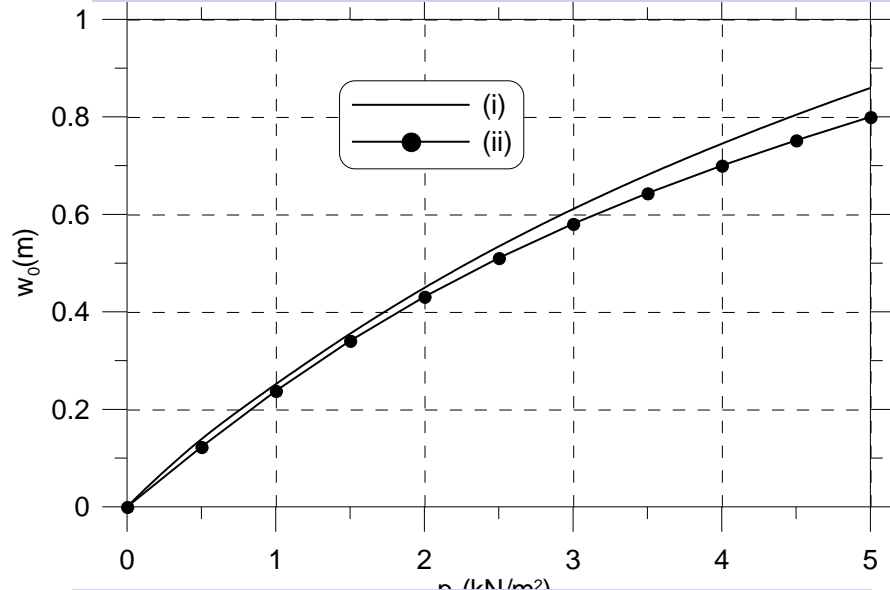
Προφίλ της μεμβράνης στη διατομή $y=0$

... μη γραμμική ανάλυση χωρικών μεμβρανών

Μεμβράνη με ρομβοειδή κάτοψη υποστηριζόμενη από τέσσερα καλώδια

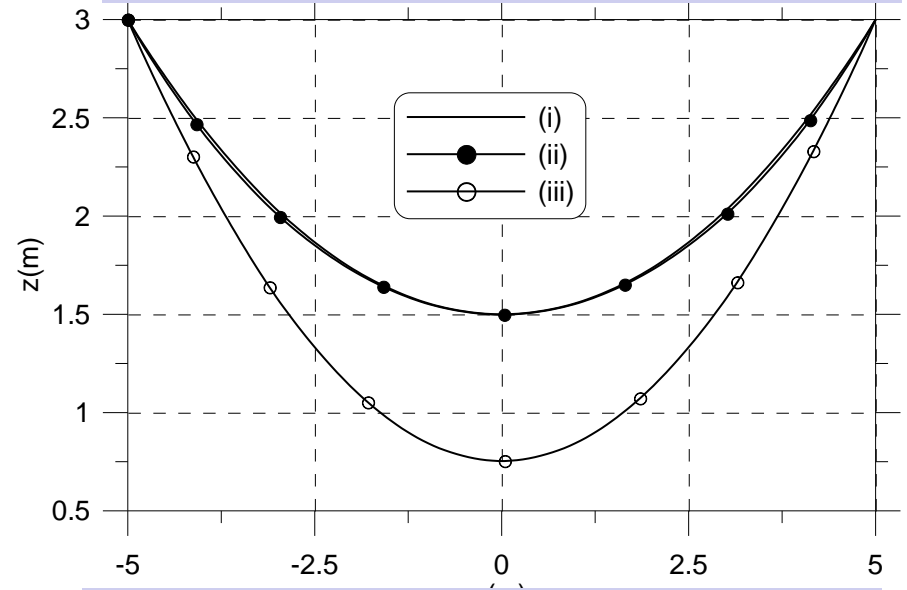


Αρχική επιφάνεια



Καμπύλη βύθισης φορτίου

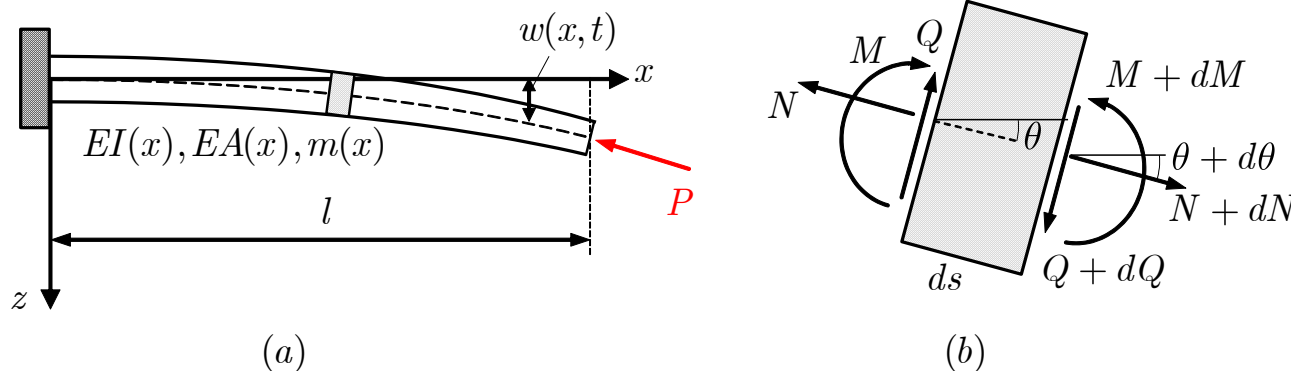
Τελική παραμορφωμένη επιφάνεια



Προφίλ της μεμβράνης στη διατομή $y=0$

Μη γραμμική δυναμική ευστάθεια στύλων μεταβλητής διατομής τύπου Beck (Katsikadelis and Tsiatas, 2007)

Στην εργασία αυτή μελετάται η **μεταλυγισμική συμπεριφορά στύλων τύπου Beck**, (στύλων υπό μη συντηρητικά φορτία) επιλύοντας το **μη γραμμικό δυναμικό πρόβλημα** των αποσβεσμένων ταλαντώσεων δοκών μεταβλητής δυσκαμψίας και δυστένειας.



Στύλος τύπου Beck μεταβλητής διατομής (a) δυνάμεις και ροπές που ασκούνται στο παραμορφωμένο στοιχείο (b).

Εξετάζεται εάν ο **μεταλυγισμικός δρόμος ισορροπίας** οδηγεί σε **σταθερές ή ασταθείς λύσεις**.

Η πρώτη περίπτωση (**υπερκρίσιμη διακλάδωση**) είναι η **σταθερή** λύση στην οποία όλες οι λύσεις τείνουν **ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος**.

Στη δεύτερη περίπτωση (**υποκρίσιμη διακλάδωση**) η λύση είναι **ασταθής** ακόμη και για τιμές του φορτίου μικρότερες από το φορτίο λυγισμού.

...μη γραμμική δυναμική ευστάθεια στύλων μεταβλητής διατομής τύπου Beck

Πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$\left[EA u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right]_{,x} + \left[EI w_{,xx} \right]_{,x} = 0$$

$$-m\ddot{w} - c\dot{w} - EI w_{,xx} + E^* I \dot{w}_{,xx} + \left[EA u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right] w_{,x} = 0$$

Εξισώσεις ισορροπίας
συναρτήσεων των
μετατοπίσεων

$$u(0) = 0 \quad EA u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \Big|_{x=l} = -P$$

$$w(0) = 0 \quad -EI w_{,xx} \Big|_{x=l} = 0$$

$$w_{,x}(0) = 0 \quad -EI w_{,xx} \Big|_{x=l} = 0$$

Συνοριακές συνθήκες

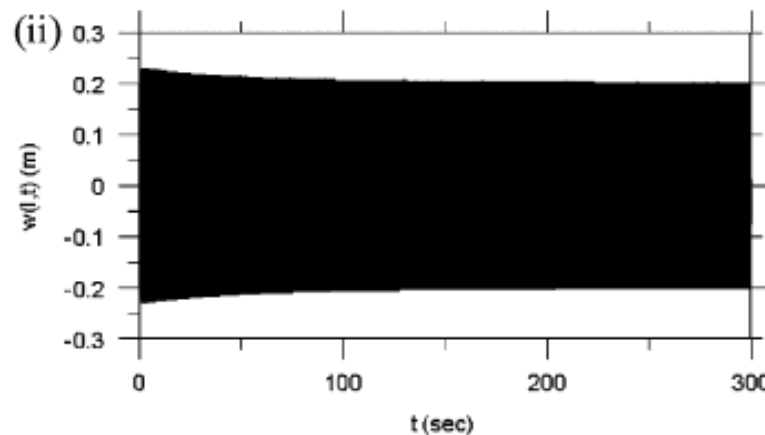
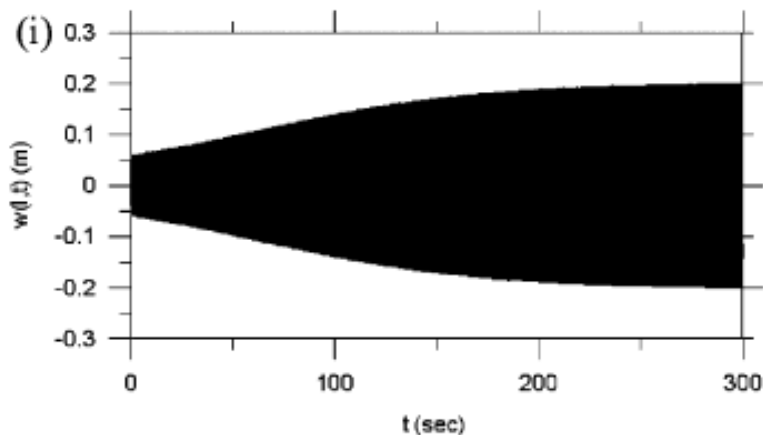
$$w(x,0) = \tilde{w}(x) \quad \dot{w}(x,0) = \dot{\tilde{w}}(x)$$

Αρχικές συνθήκες

...μη γραμμική δυναμική ευστάθεια στύλων μεταβλητής διατομής τύπου Beck

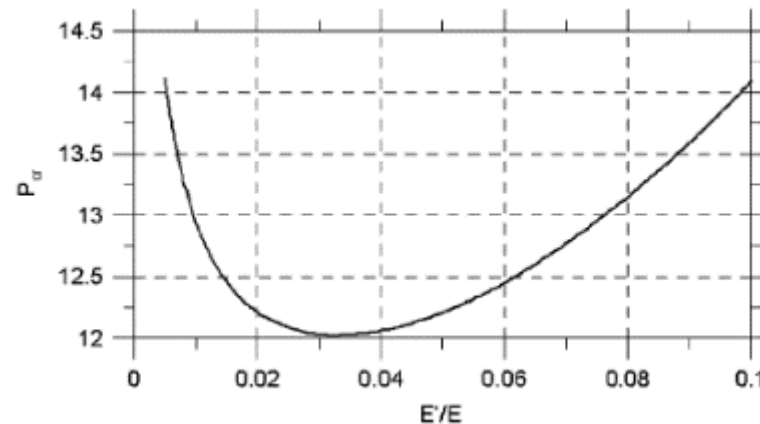
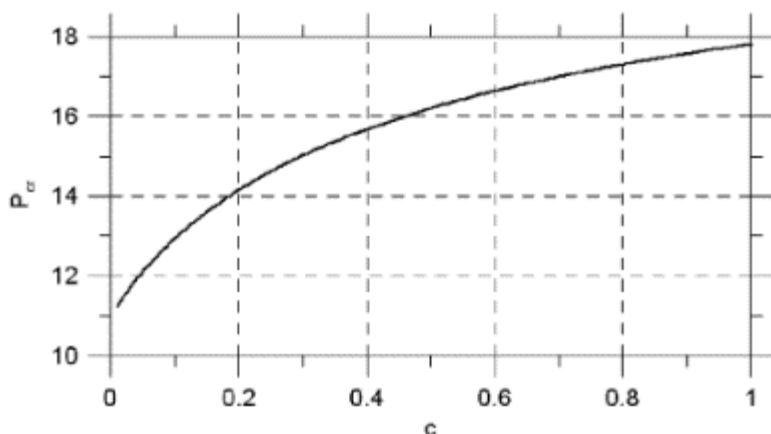
Στύλος σταθερής διατομής

Η σταθερή διατομή εμφανίζει πάντα υπερκρίσιμη διακλάδωση



Χρονική εξέλιξη της βύθισης στην άκρη του προβόλου ($P_{cr}=12.94$, $P=13.33$, $w_l=0.05$)

Χρονική εξέλιξη της βύθισης στην άκρη του προβόλου ($P_{cr}=12.94$, $P=13.33$, $w_l=0.20$)



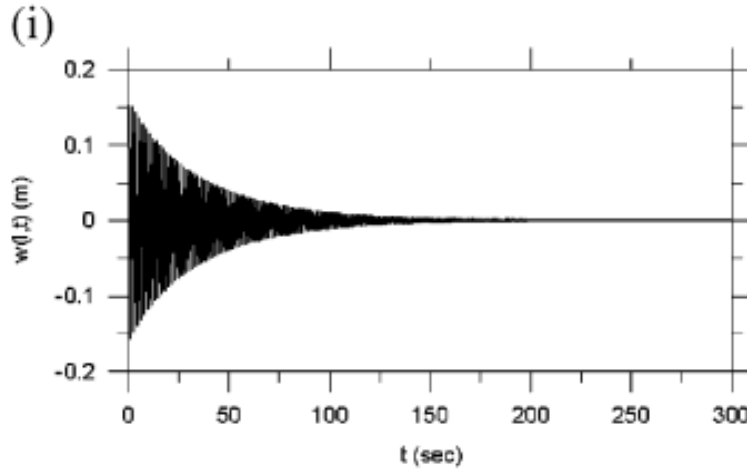
Κρίσιμο φορτίο συναρτήσει της εξωτερικής απόσβεσης ($E^*=0.01E$)

Κρίσιμο φορτίο συναρτήσει της εσωτερικής απόσβεσης ($c=0.1$)

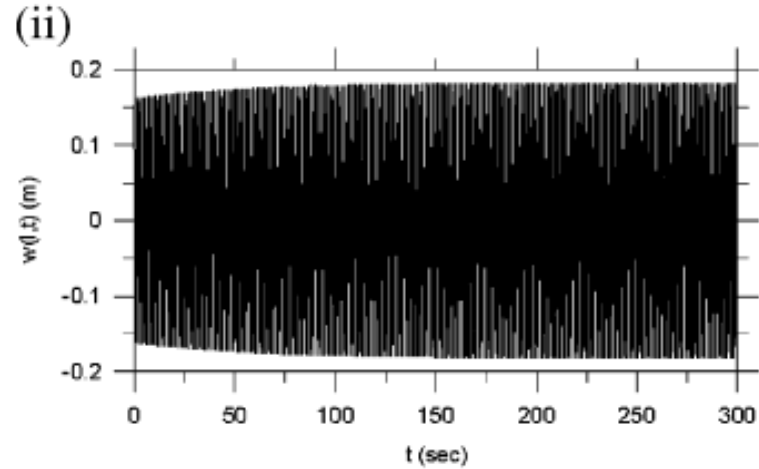
...μη γραμμική δυναμική ευστάθεια στύλων μεταβλητής διατομής τύπου Beck

Στύλος μεταβλητής διατομής

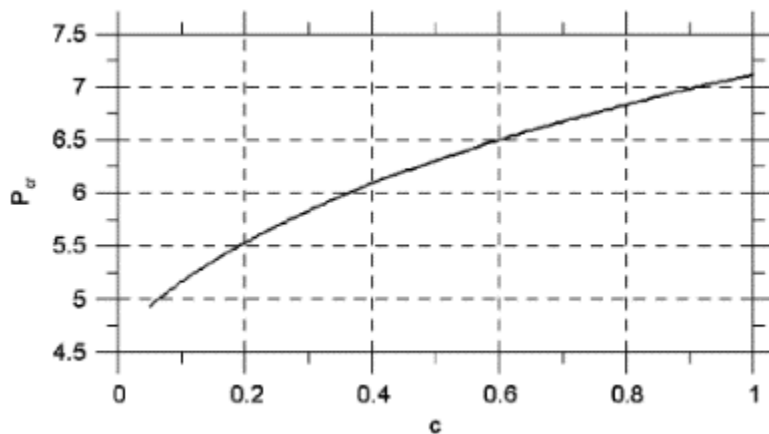
Η μεταβλητή διατομή εμφανίζει πάντα υπερκρίσιμη διακλάδωση



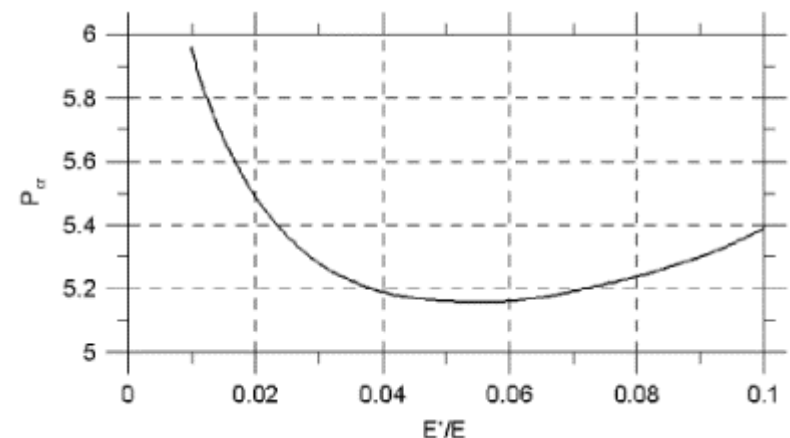
Χρονική εξέλιξη της βύθισης στην άκρη του προβόλου ($P_{cr}=5.16$, $P=5.00$, $w_1=0.15$)



Χρονική εξέλιξη της βύθισης στην άκρη του προβόλου ($P_{cr}=5.16$, $P=5.20$, $w_1=0.15$)



Κρίσιμο φορτίο συναρτήσει της εξωτερικής απόσβεσης ($E^*=0.05E$)



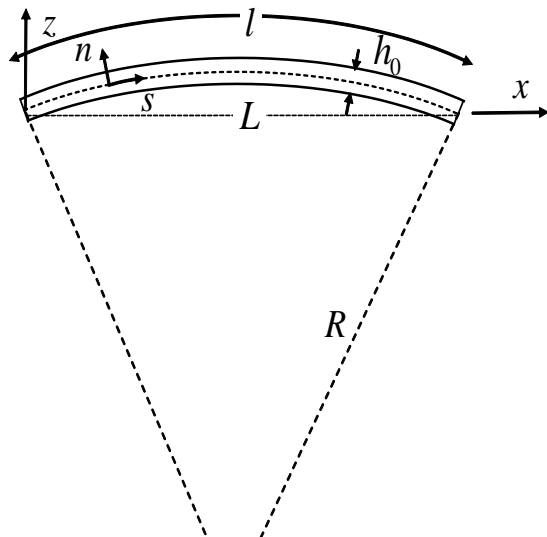
Κρίσιμο φορτίο συναρτήσει της εσωτερικής απόσβεσης ($c=0.1$)

Μη γραμμική ανάλυση τόξων μεταβλητής δυσκαμψίας (Tsiatas and Babouskos, 2015)

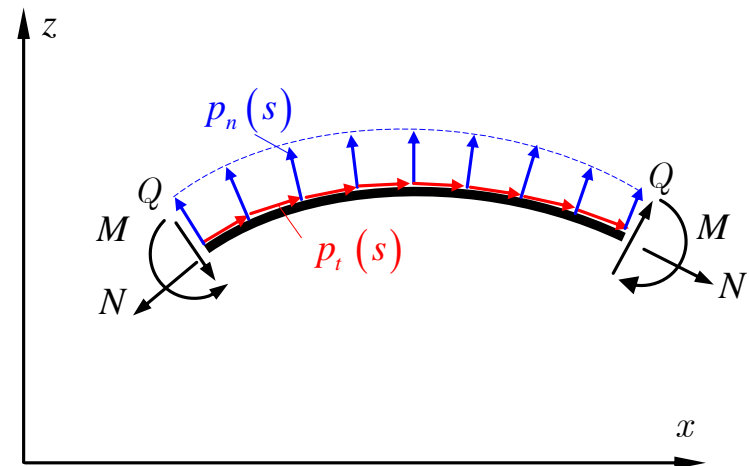
Στην εργασία αυτή επιλύεται το **μη γραμμικό πρόβλημα των κυκλικών τόξων** μεταβλητής δυσκαμψίας (τόξα με μεταβλητή διατομή ή/και μεταβλητό μέτρο ελαστικότητας) **σε μεγάλες μετακινήσεις**.

Οι **τοξωτές κατασκευές πλεονεκτούν** έναντι των ευθύγραμμων λόγω της καμπυλότητας η οποία αυξάνει τη συνολική δυσκαμψία της κατασκευής.

Τα περισσότερα τόξα σχεδιάζονται για να λειτουργούν **γραμμικώς ελαστικά**. Όταν όμως τα εξωτερικά φορτία αυξηθούν σημαντικά πέραν του φορτίου λειτουργίας, τα τόξα παρουσιάζουν **μεγάλες μετακινήσεις** οι οποίες μπορεί να οδηγήσουν σε απώλεια ευστάθειας με καταστροφικές συνέπειες για την κατασκευή (**snap-through buckling**).



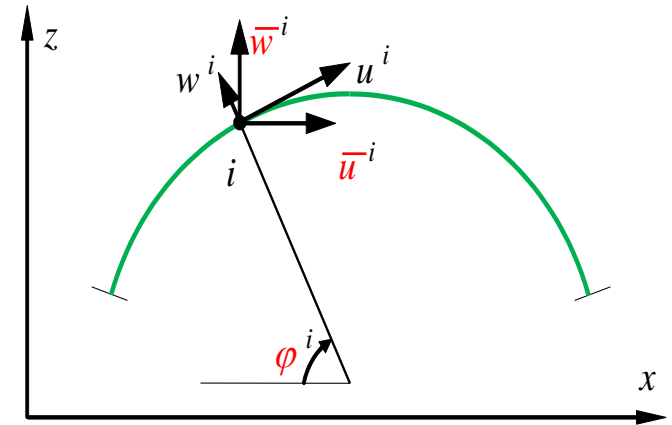
Γεωμετρία τόξου



Εντατικά μεγέθη που αναπτύσσονται σε τόξο

...μη γραμμική ανάλυση τόξων μεταβλητής δυσκαμψίας

Οι **δύο μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας** είναι **πεπλεγμένες**, λόγω της καμπυλότητας, και διατυπώνονται συναρτήσει των μετακινήσεων στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων (**u** και **w**).



Πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\left[EA \left(u_{,s} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} w_{,s}^2 \right) \right]_{,s} - \frac{EI w_{,ss} \, ,s}{R} = -p_t$$

$$- EI w_{,ss} \, ,ss - \frac{EA}{R} \left(u_{,s} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} w_{,s}^2 \right) + \left[EA \left(u_{,s} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} w_{,s}^2 \right) w_{,s} \right]_{,s} = -p_n$$

Εξισώσεις
ισορροπίας
συναρτήσει των
μετατοπίσεων

$$a_1 u \, 0 + a_2 N \, 0 = a_3 \quad \bar{a}_1 u \, / + \bar{a}_2 N \, / = \bar{a}_3$$

$$\beta_1 w \, 0 + \beta_2 Q \, 0 = \beta_3 \quad \bar{\beta}_1 w \, / + \bar{\beta}_2 Q \, / = \bar{\beta}_3$$

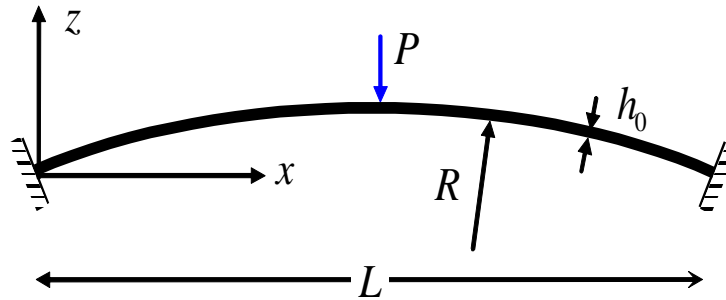
$$\gamma_1 w_{,s} \, 0 + \gamma_2 M \, 0 = \gamma_3 \quad \bar{\gamma}_1 w_{,s} \, / + \bar{\gamma}_2 M \, / = \bar{\gamma}_3$$

Συνοριακές
συνθήκες

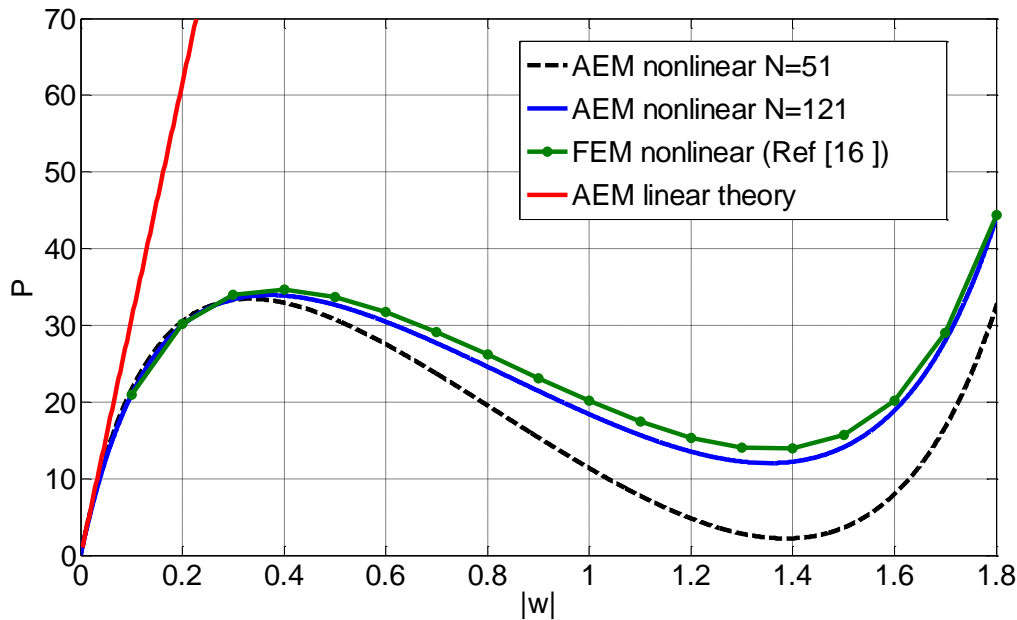
Οι **εξισώσεις ισορροπίας** λόγω της μεταβλητής δυσκαμψίας έχουν **μεταβλητούς συντελεστές** και επιλύονται με μέθοδο **Newton-Rapshon** σε συνδυασμό με την **Arc-length** η οποία επιτρέπει τον προσδιορισμό του μεταλυγισμικού δρόμου ισορροπίας.

...μη γραμμική ανάλυση τόξων μεταβλητής δυσκαμψίας

Τόξο σταθερής διατομής



Γεωμετρία τόξου

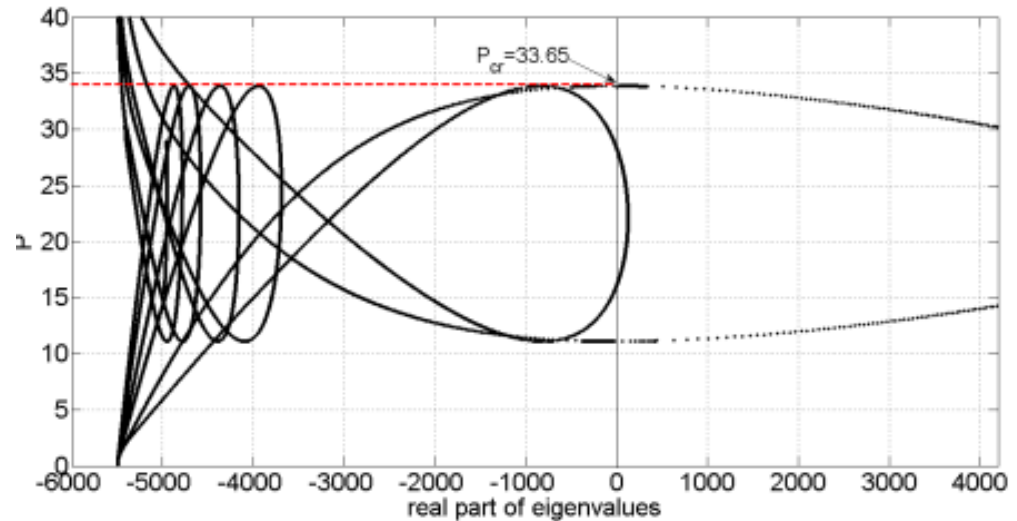


Καμπύλη βύθισης – φορτίου στο κέντρο του τόξου

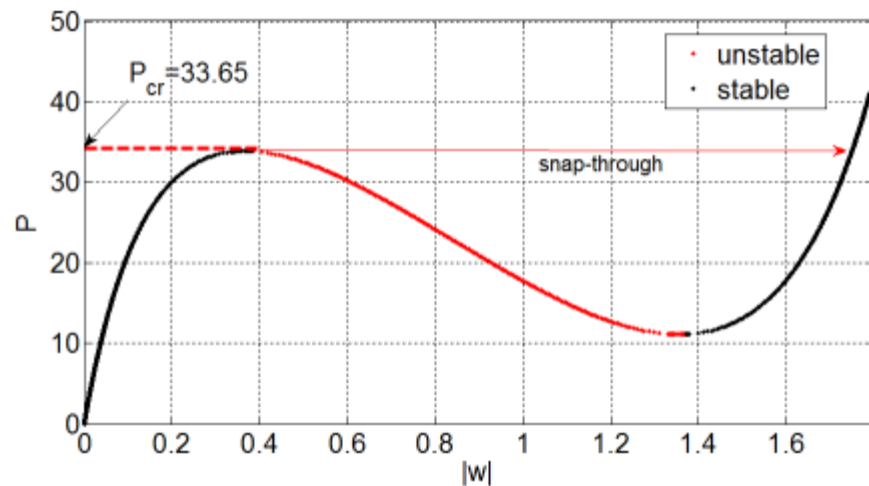
...μη γραμμική ανάλυση τόξων μεταβλητής δυσκαμψίας

Η ευστάθεια της λύσης προσδιορίζεται από τις ιδιοτιμές του μητρώου \mathbf{J} της **Newton-Raphson**.

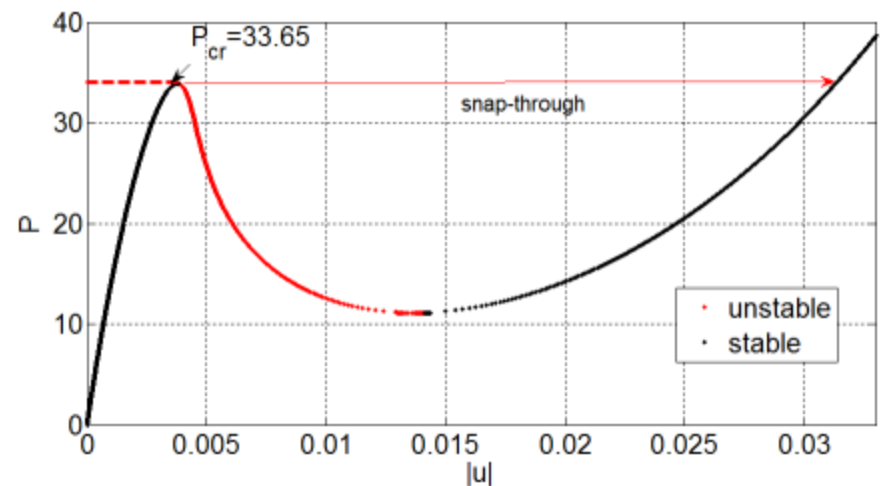
Σταθερή λύση προκύπτει όταν το **πραγματικό μέρος** όλων των **ιδιοτιμών είναι αρνητικό**.



Το πραγματικό μέρος των 6 πρώτων ιδιοτιμών



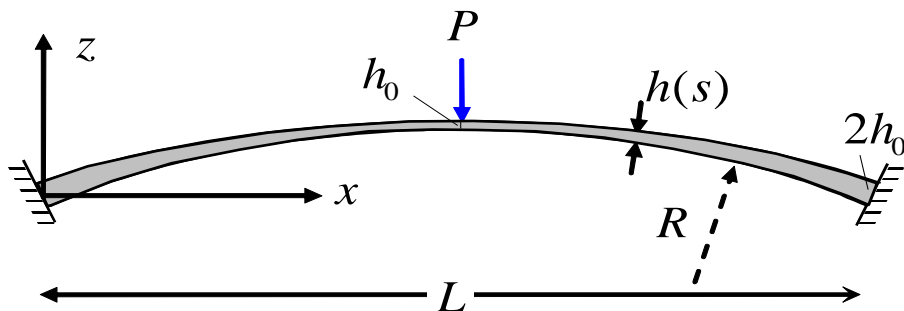
Καμπύλη μετακίνησης w – φορτίου



Καμπύλη μετακίνησης u – φορτίου

...μη γραμμική ανάλυση τόξων μεταβλητής δυσκαμψίας

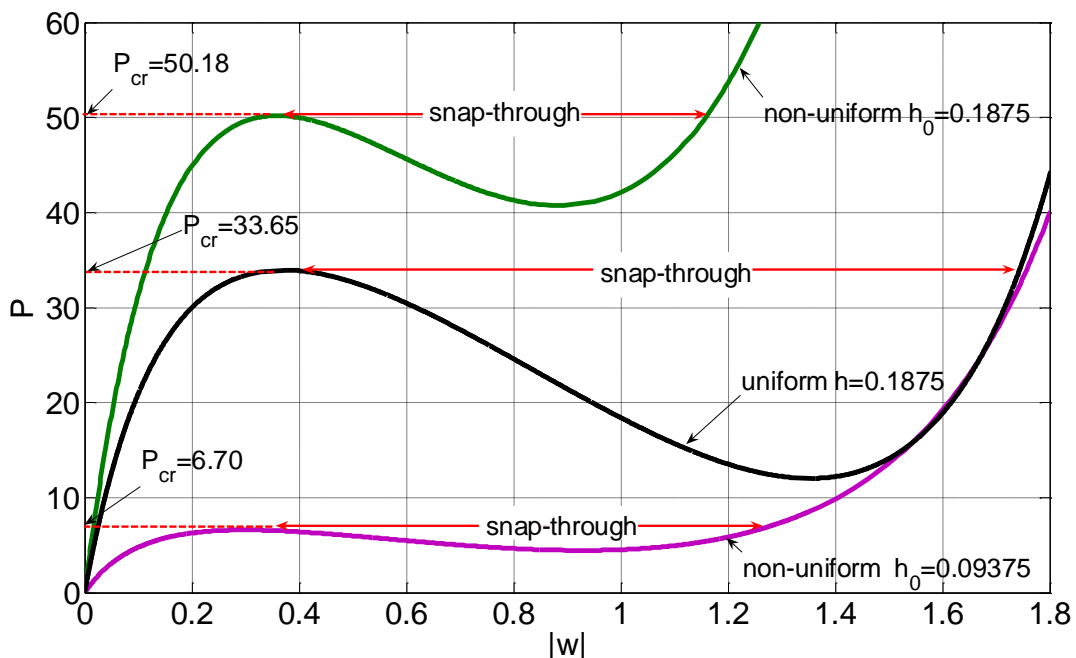
Τόξο μεταβλητής διατομής



Παραβολική κατανομή του πάχους

$$h(s) = 4h_0 s / L^2 - 4h_0 s / L + 2h_0$$

Γεωμετρία τόξου



Καμπύλη βύθισης – φορτίου στο κέντρο του τόξου

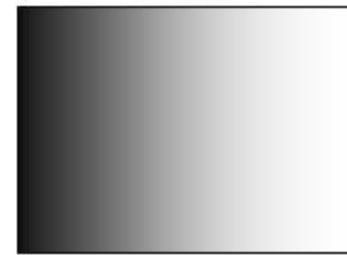
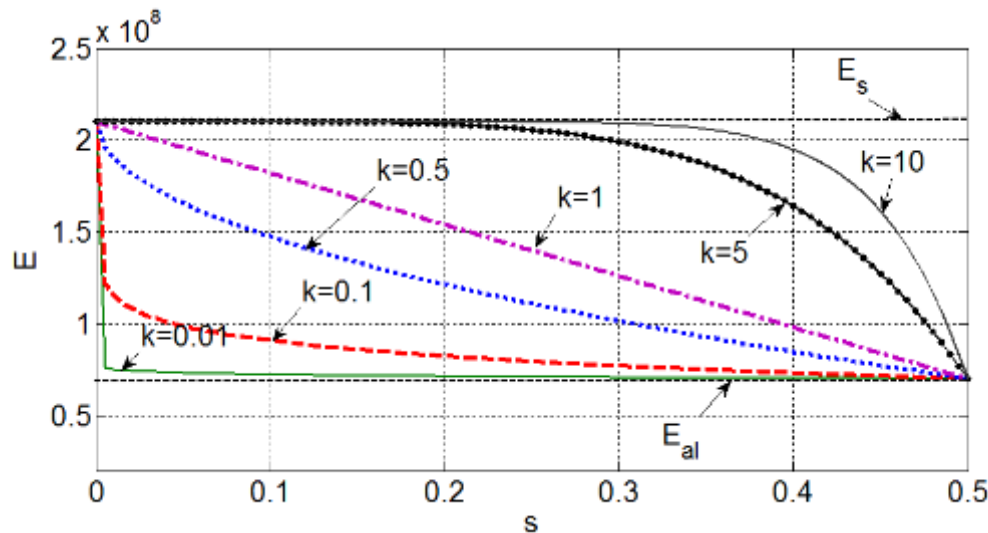
...μη γραμμική ανάλυση τόξων μεταβλητής δυσκαμψίας

Τόξο μεταβλητού μέτρου ελαστικότητας

Τα **σύνθετα υλικά με διαβαθμισμένες ιδιότητες** (Functionally Graded Materials, **FGM**) αποτελούν σήμερα την αιχμή στην επιστήμη της μηχανικής των υλικών. Ως τέτοιο υλικό μπορούμε να χαρακτηρίσουμε ένα υλικό του οποίου η **σύνθεση μεταβάλλεται βαθμιαία εντός του όγκου του**, προκαλώντας αντίστοιχες μεταβολές στις ιδιότητές του.

Η προηγμένη τεχνολογία των **FGMs** οφείλει την ύπαρξή της στην **αστοχία πολυστρωματικών υλικών** (layered materials) σε εφαρμογές στον τομέα των μεταφορών (αυτοκινητοβιομηχανία, αεροναυπηγική, διαστημική). Στην πιο απλή περίπτωση FGMs, **δύο διαφορετικά υλικά συστατικά** αλλάζουν **βαθμιαία** από το ένα συστατικό στο άλλο.

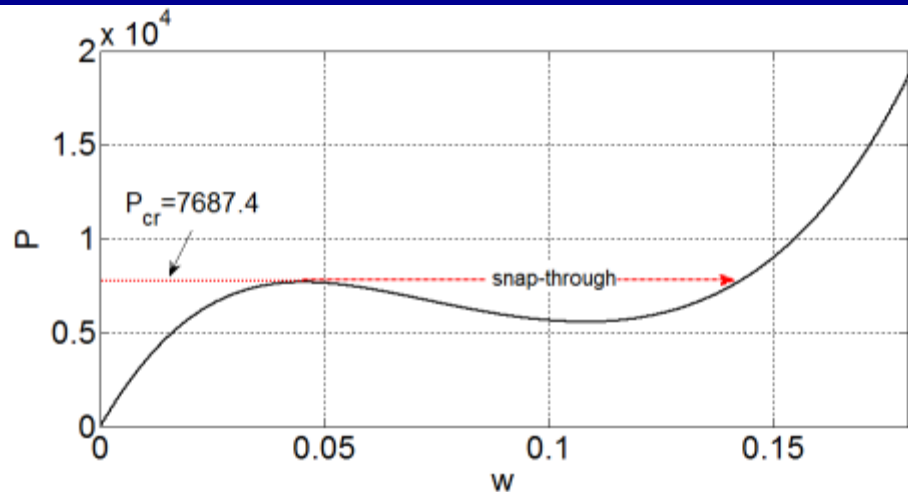
Στην παρούσα εργασία επιλέχθηκαν ως υλικά ο **χάλυβας** και το **αλουμίνιο**.



$$E(s) = E_{steel} + E_{al} - E_{steel} \left(\frac{s}{l/2} \right)^k$$

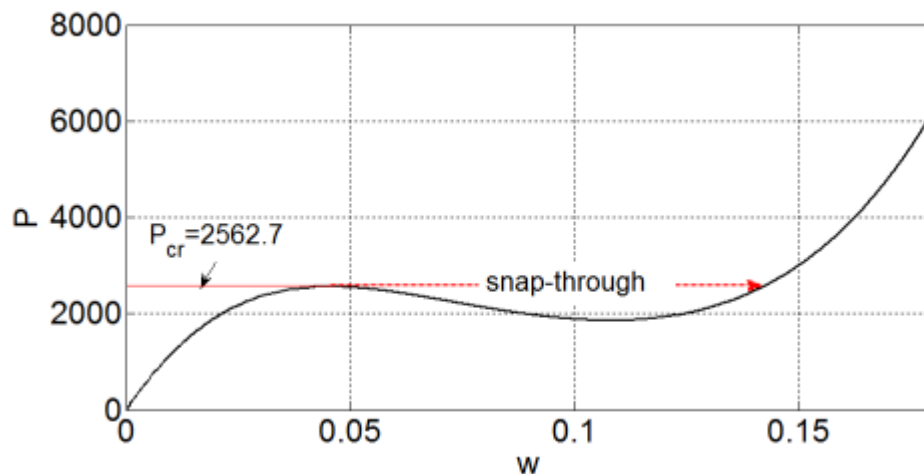
Μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας

...μη γραμμική ανάλυση τόξων μεταβλητής δυσκαμψίας

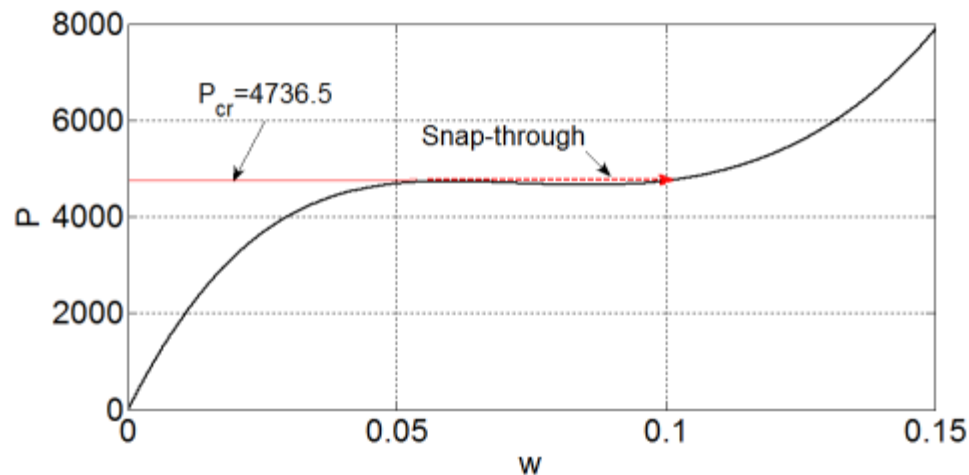


Καμπύλη βύθισης – φορτίου στο κέντρο του τόξου
(αλουμίνιο)

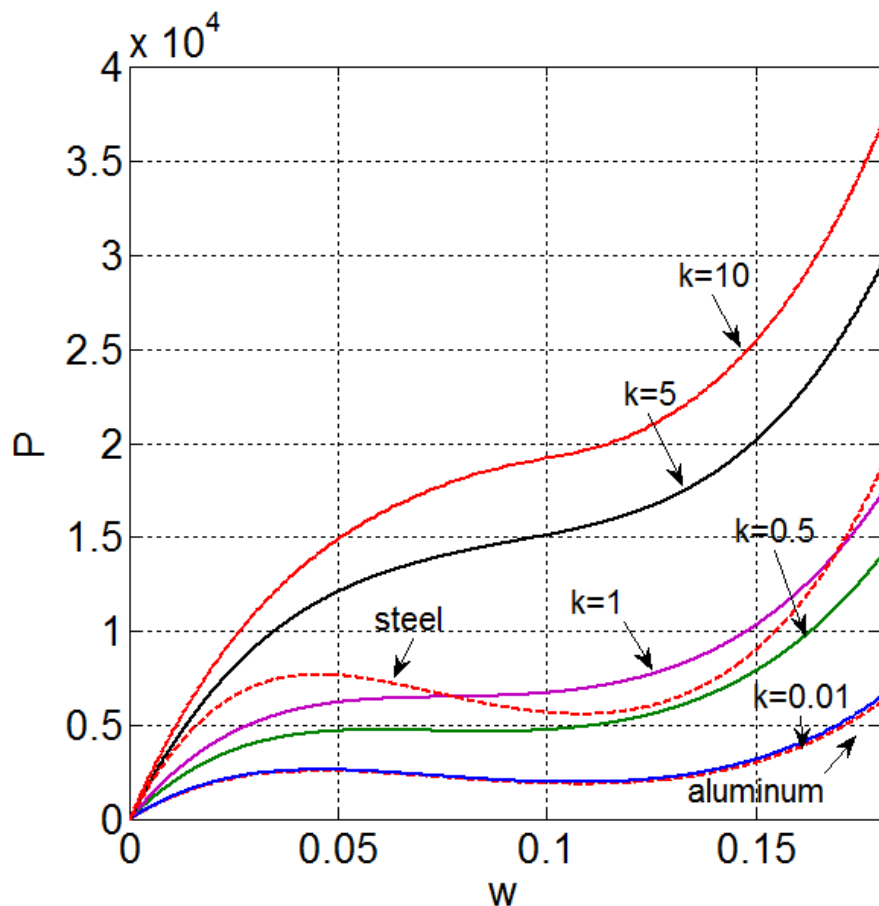
Καμπύλη βύθισης – φορτίου στο κέντρο του τόξου
(χάλυβας)



Καμπύλη βύθισης – φορτίου στο κέντρο του τόξου
(FGM, $k=0.5$)



...μη γραμμική ανάλυση τόξων μεταβλητής δυσκαμψίας



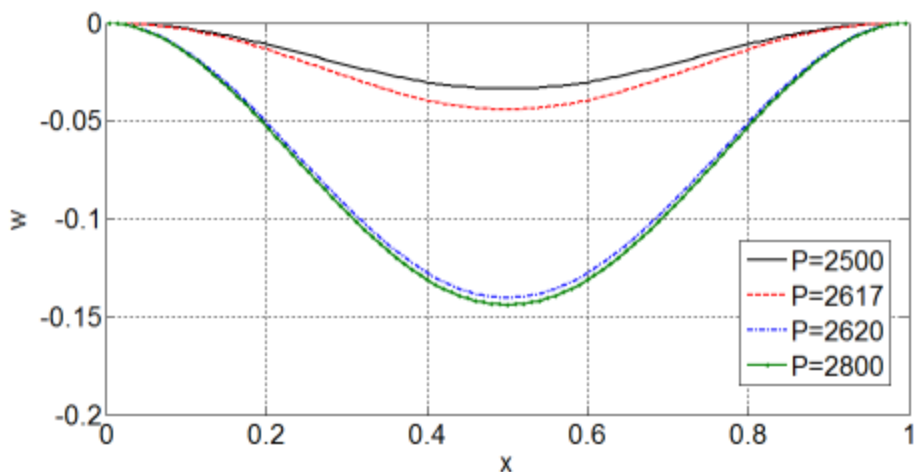
Material		P_{cr}
Aluminium ($k=0$)		2562.7
FGM	$k=0.01$	2681.4
	$k=0.1$	3074.1
	$k=0.3$	3951.5
	$k=0.5$	4736.5
	$k=0.7$	5465.2
	$k=0.8$	5820.1
	$k>0.8$	-
Steel ($k=\infty$)		7687.4

Παρατηρούμε ότι το **κρίσιμο φορτίο λυγισμού αυξάνεται με την αύξηση του k .**

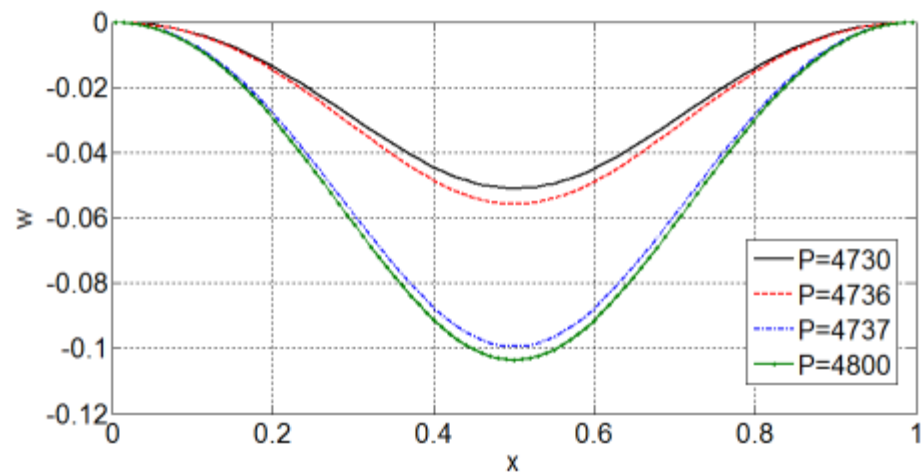
Για **$k < 0.8$** το τόξο **παρουσιάζει απώλεια ευστάθειας** λόγω λυγισμού όταν το φορτίο ξεπεράσει την κρίσιμη τιμή P_{cr} .

Για **$k > 0.8$** το τόξο **δεν παρουσιάζει απώλεια** ευστάθειας λόγω λυγισμού.

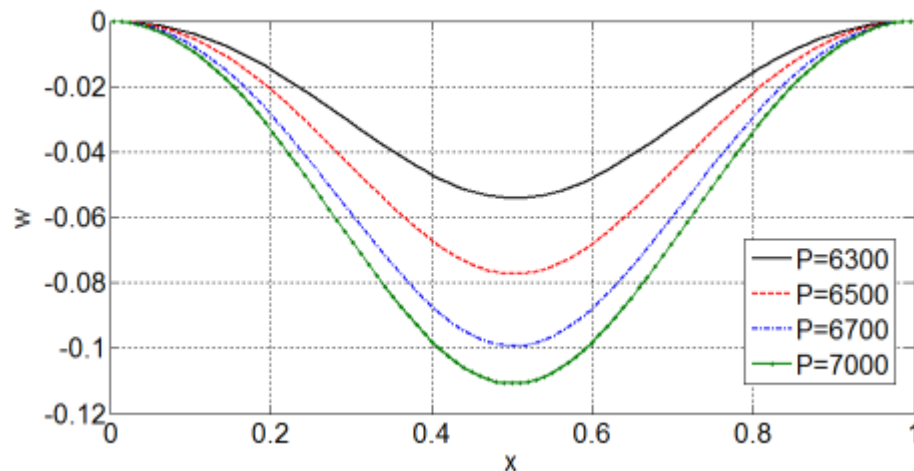
...μη γραμμική ανάλυση τόξων μεταβλητής δυσκαμψίας



Προφίλ βύθισης για διάφορες τιμές του φορτίου
για $k=0.01$ ($P_{cr}=2618.4$)



Προφίλ βύθισης για διάφορες τιμές του φορτίου
για $k=1.0$ (P_{cr} δεν ορίζεται)

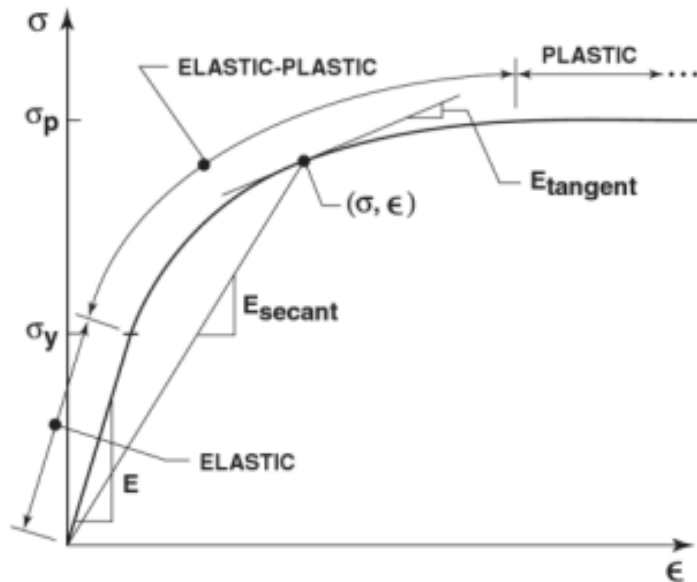


Ελαστοπλαστική ανάλυση FGM ράβδων υπό στρεπτική φόρτιση (Tsiatas and Babouskos, 2015)

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται η επίλυση του ελαστοπλαστικού πρόβληματος στρέψης κατά Saint-Venant ράβδων κατασκευασμένες από **Λειτουργικά Διαβαθμισμένα Υλικά** (Functionally Graded Materials, FGMs).

Η μη γραμμική ελαστοπλαστική συμπεριφορά του υλικού περιγράφεται από τη **Θεωρία Πλαστικής Παραμόρφωσης** (Deformation Theory of Plasticity) για μονοτονική φόρτιση.

Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή **οι μηχανικές ιδιότητες του υλικού μεταβάλλονται σε κάθε σημείο της διατομής** έτσι ώστε σε κάθε βήμα της μη γραμμικής ανάλυσης η ισοδύναμη τάση και τροπή να ικανοποιούν την **καμπύλη τάσεων-τροπών του υλικού**.

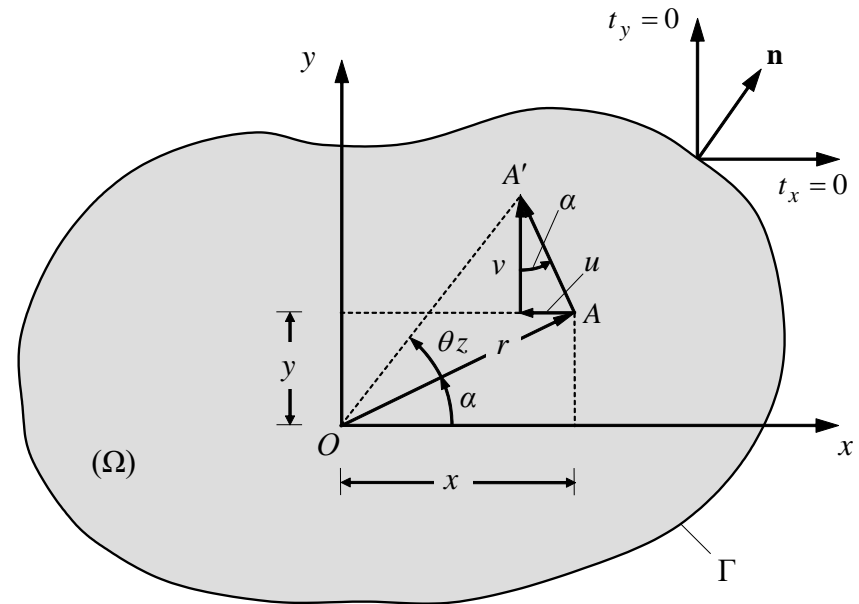
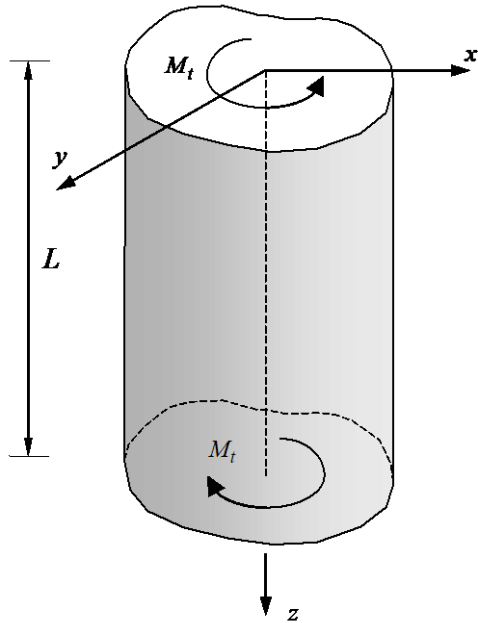


...ελαστοπλαστική ανάλυση FGM ράβδων υπό στρεπτική φόρτιση

Θεωρούμε ράβδο τυχούσας διατομής και μήκους L . Η διατομή είναι σταθερή κατά μήκος της ράβδου και υποβάλλεται σε στρέψη από ροπές M_t που εφαρμόζονται στα άκρα της.

Σύμφωνα με τη θεωρία του **Saint-Venant** η παραμόρφωση της ράβδου οφείλεται σε:

- (a) **στροφές των διατομών**
- (b) **στρέβλωση των διατομών**, η οποία είναι ίδια σε όλες τις διατομές..



θ είναι η στροφή

Με την παραδοχή ότι η στροφή είναι μικρή, **οι μετατοπίσεις ενός τυχαίου σημείου είναι:**

$$u = -\theta zy \quad v = \theta zx \quad w = \theta \phi(x, y)$$

$\phi(x, y)$ είναι η συνάρτηση στρέβλωσης

...ελαστοπλαστική ανάλυση FGM ράβδων υπό στρεπτική φόρτιση

Το πεδίο των μετακινήσεων δίνει τις παρακάτω μη μηδενικές συνιστώσες του **τανυστή των τροπών**

$$\gamma_{xz} = \theta(\phi, x - y) \quad \gamma_{yz} = \theta(\phi, y + x)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση τάσεων τροπών της **Θεωρίας Πλαστικής Παραμόρφωσης** προκύπτουν οι κάτωθι μη μηδενικές συνιστώσες του **τανυστή των τάσεων**

$$\tau_{xz} = G_{eff} \theta(\phi, x - y) \quad \tau_{yz} = G_{eff} \theta(\phi, y + x)$$

όπου G_{eff} είναι το ενεργό **μέτρο διάτμησης**

$$G_{eff} = \frac{E_{eff}}{2(1 + \nu_{eff})}$$

Επίσης, οι **ισοδύναμες τάσεις** και **τροπές** λαμβάνουν τη μορφή

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3(\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)} \quad \varepsilon_{eq} = \frac{1}{2(1 + \nu_{eff})} \sqrt{3(\gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)}$$

...ελαστοπλαστική ανάλυση FGM ράβδων υπό στρεπτική φόρτιση

Εισάγοντας τις τάσεις \mathbf{T}_{xz} και \mathbf{T}_{yz} στις εξισώσεις ισορροπίας και τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες του τρισδιάστατου σώματος προκύπτει το παρακάτω **Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών (ΠΣΤ) για τη συνάρτηση στρέβλωσης**

$$G_{eff} \nabla^2 \phi + G_{eff,x} \phi_{,x} + G_{eff,y} \phi_{,y} = y G_{eff,x} - x G_{eff,y}$$

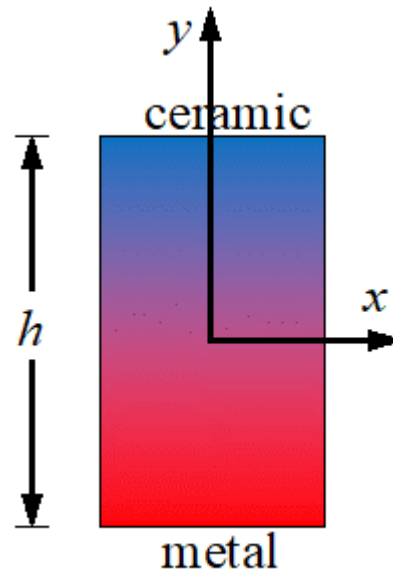
$$\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = y n_x - x n_y$$

όπου \mathbf{n} είναι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο σύνορο Γ .

Ας σημειωθεί ότι το ΠΣΤ είναι αυτό της **στρέψης μιας μη ομογενούς ράβδου**, εφόσον το **ενεργό μέτρο διάτμησης είναι μια συνάρτηση πεδίου** η οποία παίρνει διαφορετικές τιμές για κάθε σημείο του χωρίου Ω .

...ελαστοπλαστική ανάλυση FGM ράβδων υπό στρεπτική φόρτιση

Στην παρούσα μελέτη το **μοντέλο ΤΤΟ** (Tamura et al. 1973) χρησιμοποιείται για να περιγράψει την ελαστοπλαστική συμπεριφορά των υλικών FGM, ενώ τα υλικά που επιλέχθηκαν είναι το **κεραμικό** και ο **χάλυβας**.



Ο κλασματικός όγκος **V** των δύο συστατικών του υλικού ακολουθεί την παρακάτω **εκθετική κατανομή** καθ' ύψος της διατομής

$$V_c = (0.5 + y/h)^k \quad V_c + V_m = 1$$

όπου **k** είναι θετικός εκθετικός όρος.

...ελαστοπλαστική ανάλυση FGM ράβδων υπό στρεπτική φόρτιση

Σύμφωνα με το **μοντέλο ΤΤΟ** η μηχανική συμπεριφορά ενός σύνθετου μεταλλικού-κεραμικού υλικού πέρα της ελαστικής περιοχής, ουσιαστικά ελέγχεται από την εξάπλωση της πλαστικότητας του χάλυβα. Ειδικότερα, το **ψαθυρό κεραμικό υλικό συμπεριφέρεται ελαστικά**, ενώ ο **χάλυβας συμπεριφέρεται ελαστοπλαστικά με γραμμική κράτυνση**.

Στην περίπτωση αυτή, οι **ελαστοπλαστικές σταθερές του διγραμμικού υλικού** μεταβάλλονται καθ' ύψος της διατομής ως

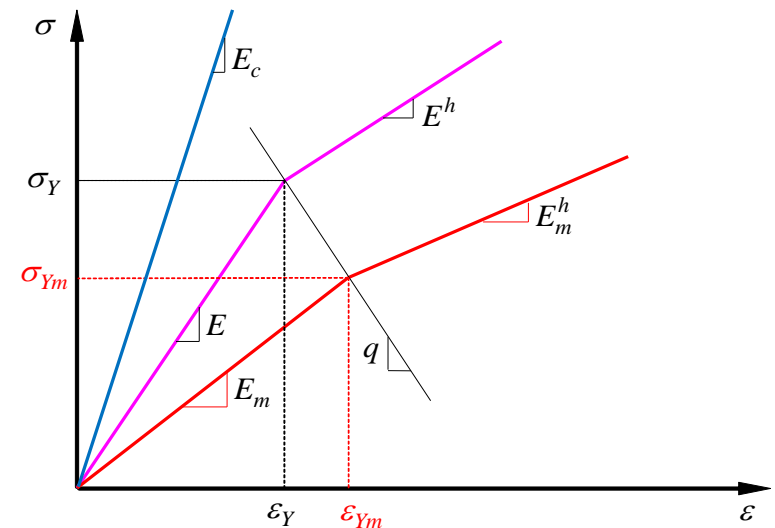
$$E = (RE_m V_m + E_c V_c) / (RV_m + V_c)$$

$$R = \frac{q + E_c}{q + E_m}$$

$$v = v_m V_m + v_c V_c$$

$$\sigma_Y = \sigma_{Ym} \left(V_m + \frac{1}{R} \frac{E_c}{E_m} V_c \right)$$

$$E^h = (RE_m^h V_m + E_c V_c) / (RV_m + V_c)$$

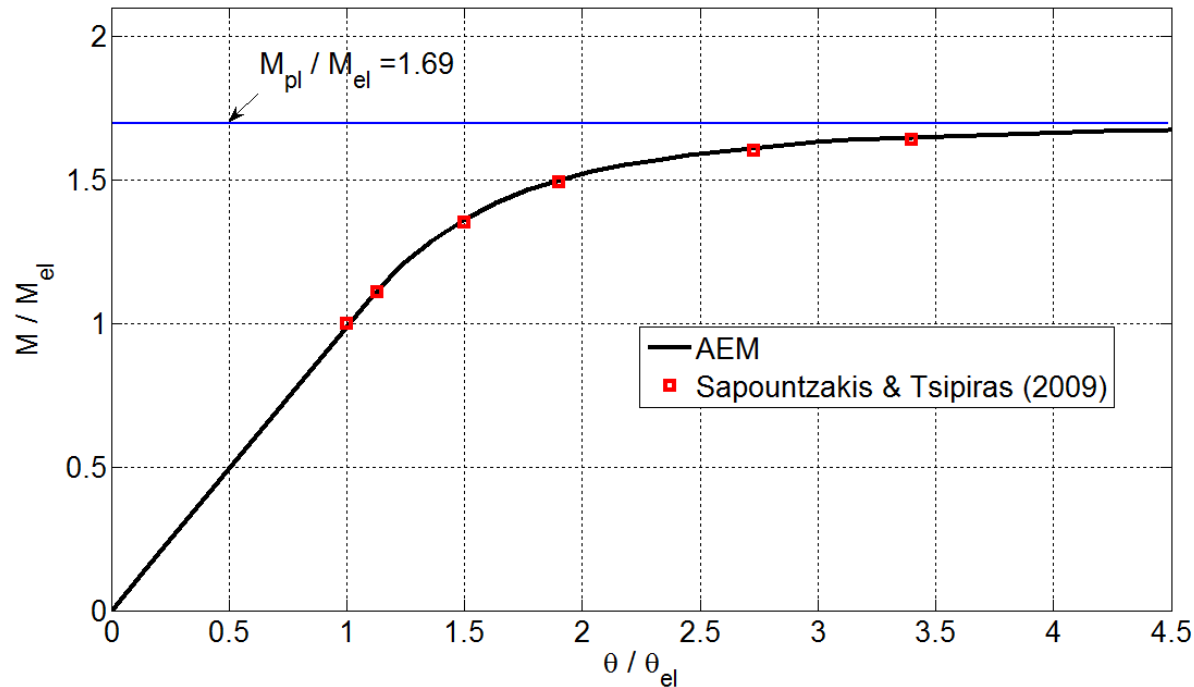


όπου **E**, **v**, **σ_Y**, και **E^h** είναι το μέτρο ελαστικότητας, λόγος Poisson, τάση διαρροής, και το μέτρο ελαστικότητας μετά τη διαρροή του **ομογενοποιημένου υλικού**.

...ελαστοπλαστική ανάλυση FGM ράβδων υπό στρεπτική φόρτιση

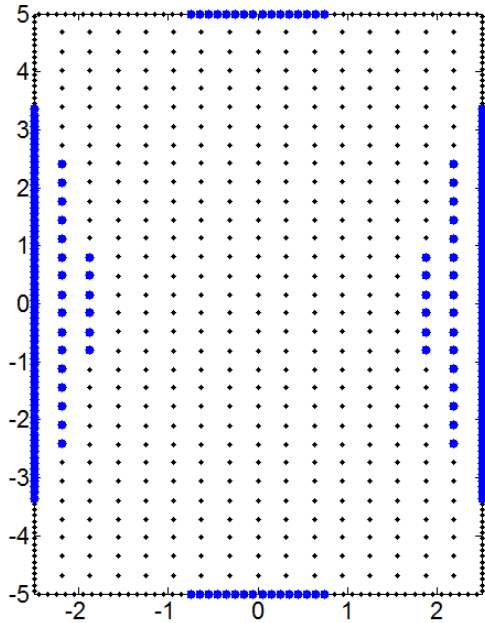
Ορθογωνική διατομή – Ελαστοπλαστικό υλικό

Τα δεδομένα είναι: $b = 5\text{cm}$ $h = 10\text{cm}$ $E = 210600\text{ kN/cm}^2$ $\nu = 0.3$ $\sigma_Y = 24\text{ kN/cm}^2$

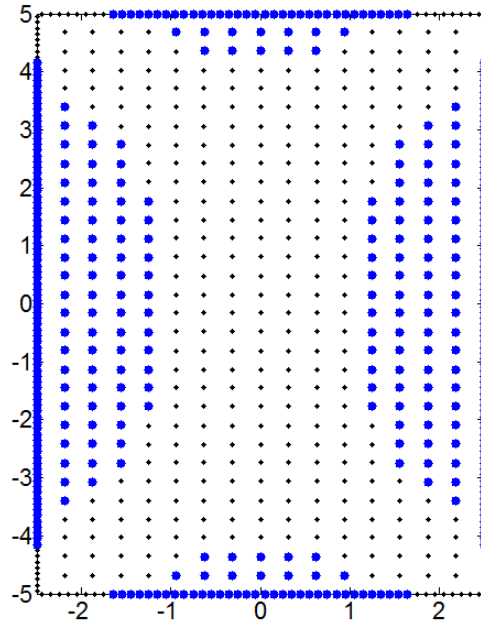


Καμπύλη στρεπτικής ροπής – στρωφής

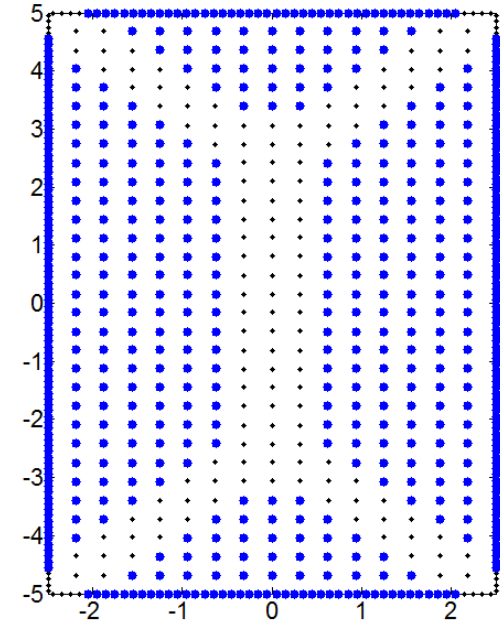
...ελαστοπλαστική ανάλυση FGM ράβδων υπό στρεπτική φόρτιση



$$\theta/\theta_{el}=1.36$$



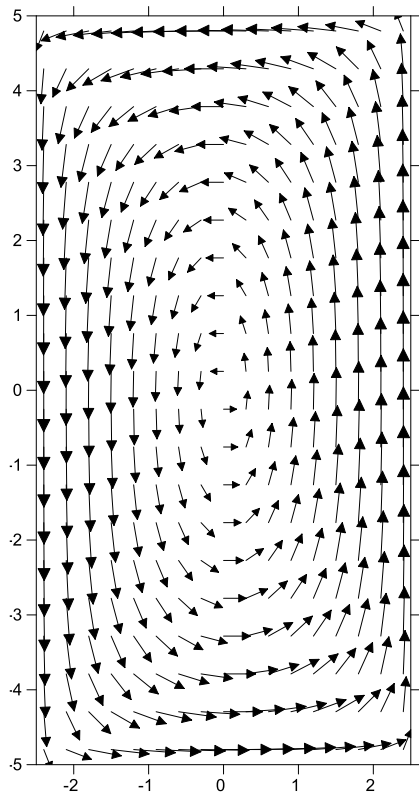
$$\theta/\theta_{el}=2.18$$



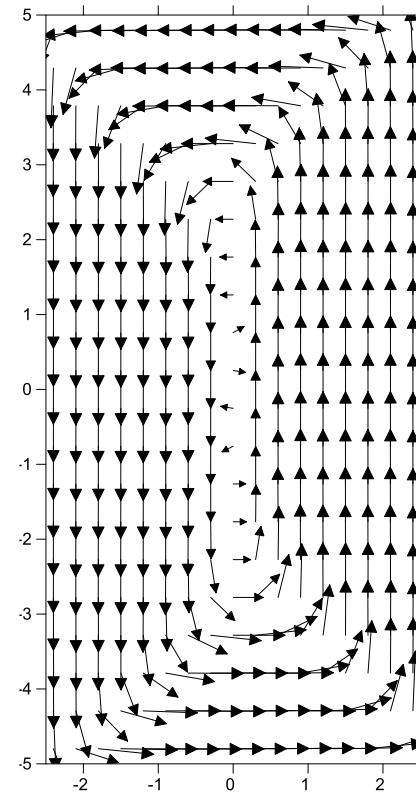
$$\theta/\theta_{el}=4.75$$

Πλαστικές περιοχές της ορθογωνικής διατομής για διάφορες τιμές της στροφής θ .

...ελαστοπλαστική ανάλυση FGM ράβδων υπό στρεπτική φόρτιση



$\theta/\theta_{el}=1.00$



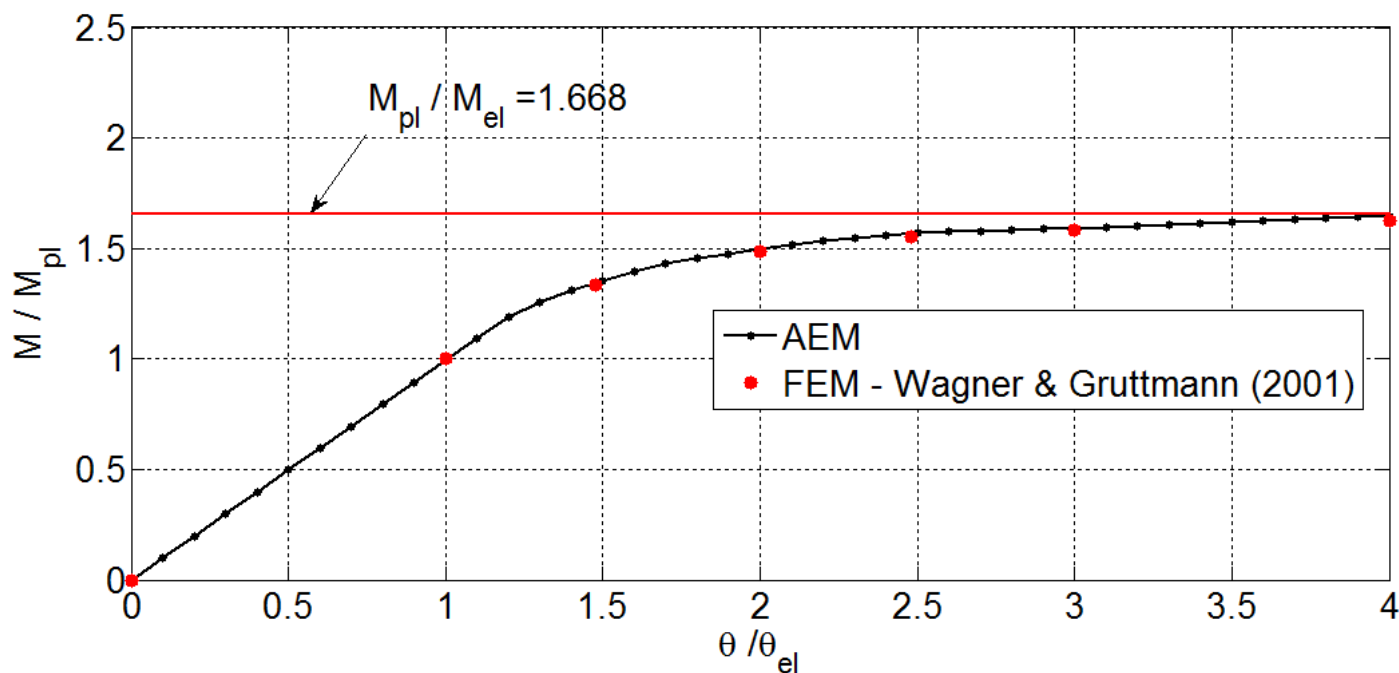
$\theta/\theta_{el}=4.75$

Διατμητικές τάσεις στην ελαστική ($\theta/\theta_{el}=1.00$) and πλαστική ($\theta/\theta_{el}=4.75$) περιοχή.

...ελαστοπλαστική ανάλυση FGM ράβδων υπό στρεπτική φόρτιση

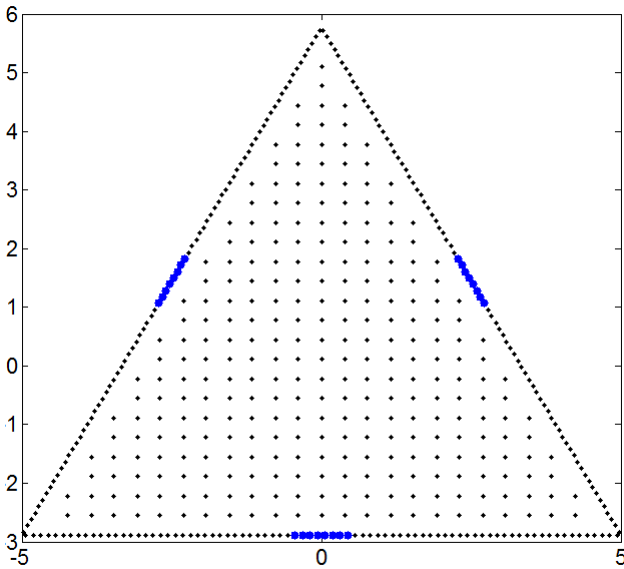
Τριγωνική διατομή – Ελαστοπλαστικό υλικό

Τα δεδομένα είναι: $b = 10\text{cm}$ $E = 210600\text{ kN/cm}^2$ $\nu = 0.3$ $\sigma_Y = 24\text{ kN/cm}^2$

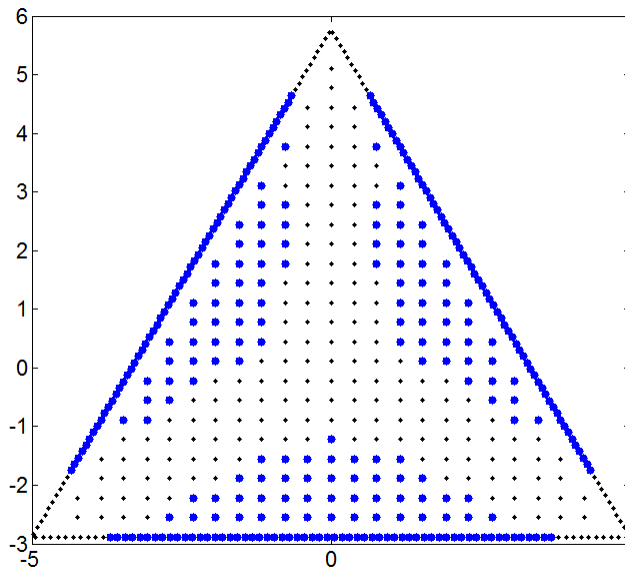


Καμπύλη στρεπτικής ροπής – στροφής

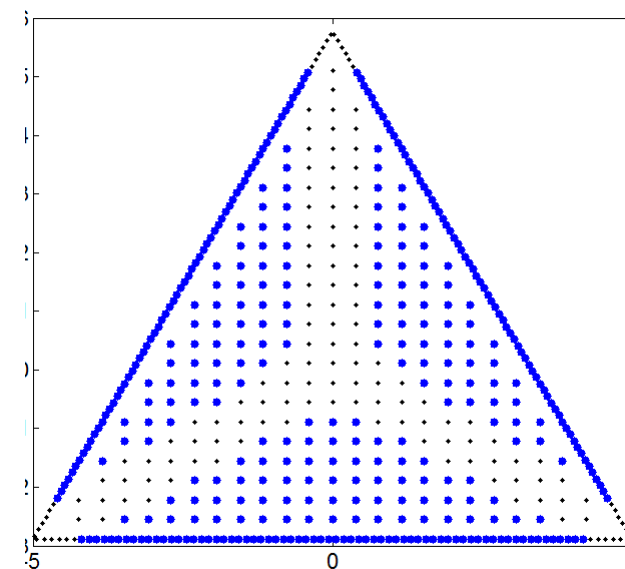
...ελαστοπλαστική ανάλυση FGM ράβδων υπό στρεπτική φόρτιση



$$\theta/\theta_{el}=1.05$$



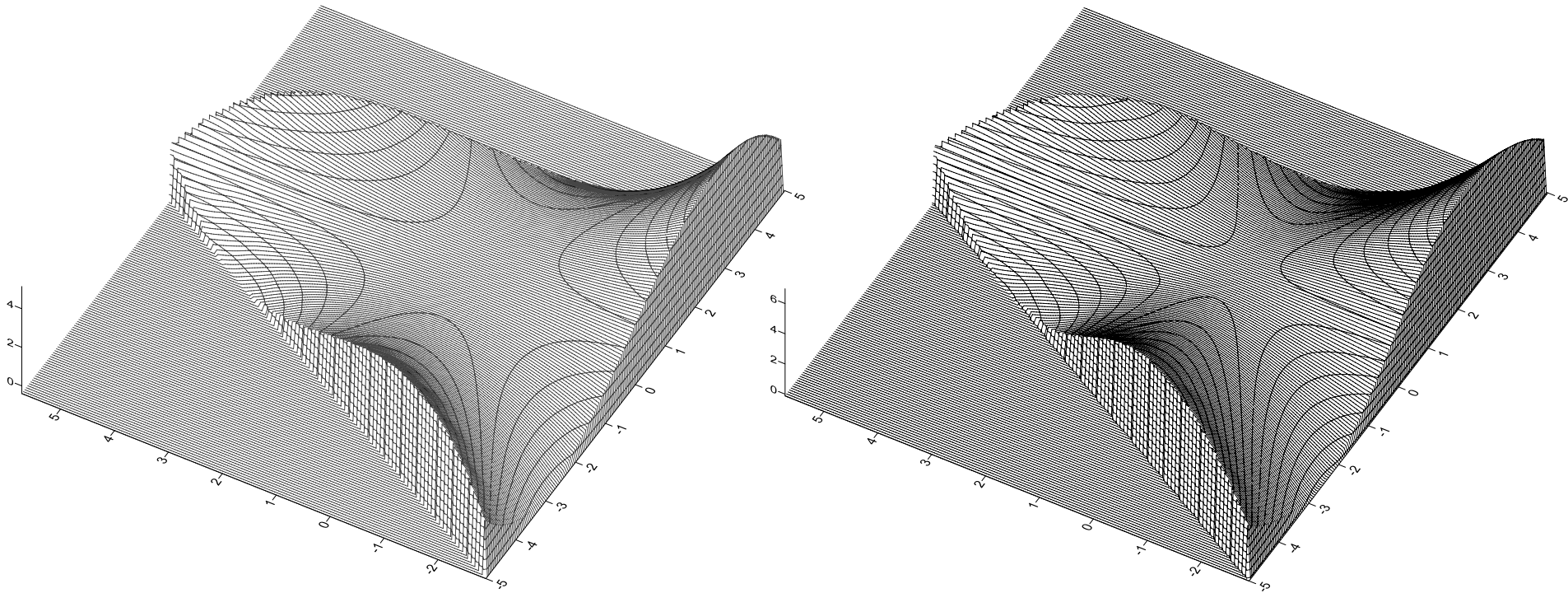
$$\theta/\theta_{el}=2.06$$



$$\theta/\theta_{el}=4.30$$

Πλαστικές περιοχές της ορθογωνικής διατομής για διάφορες τιμές της στροφής θ .

...ελαστοπλαστική ανάλυση FGM ράβδων υπό στρεπτική φόρτιση



Συνάρτηση στρέβλωσης στην ελαστική ($\theta/\theta_{el}=1.00$) και πλαστική ($\theta/\theta_{el}=4.30$) περιοχή.

...ελαστοπλαστική ανάλυση FGM ράβδων υπό στρεπτική φόρτιση

Ορθογωνική διατομή – FGM υλικό

Τα δεδομένα είναι:

$$b = 5\text{cm}$$

$$h = 10\text{cm}$$

$$E_c = 5000 \text{ kN/cm}^2$$

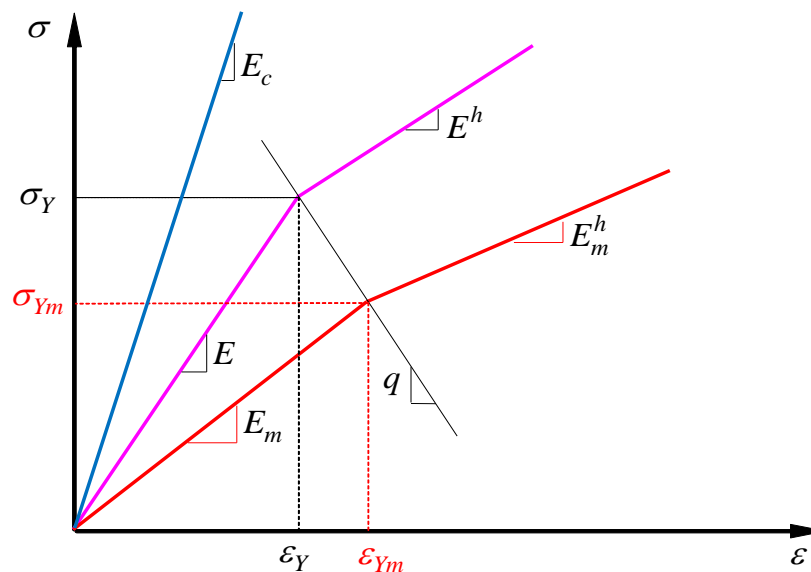
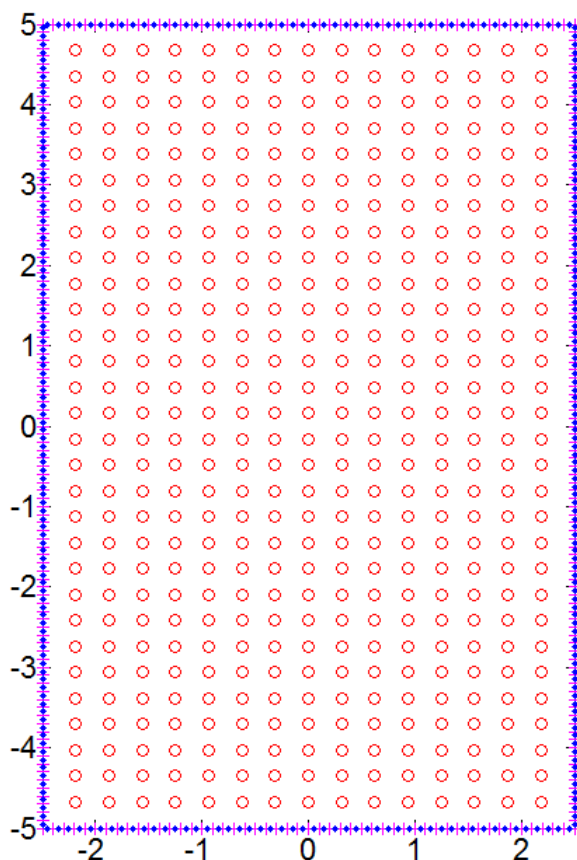
$$\nu_c = 0.25$$

$$E_m = 3000 \text{ kN/cm}^2$$

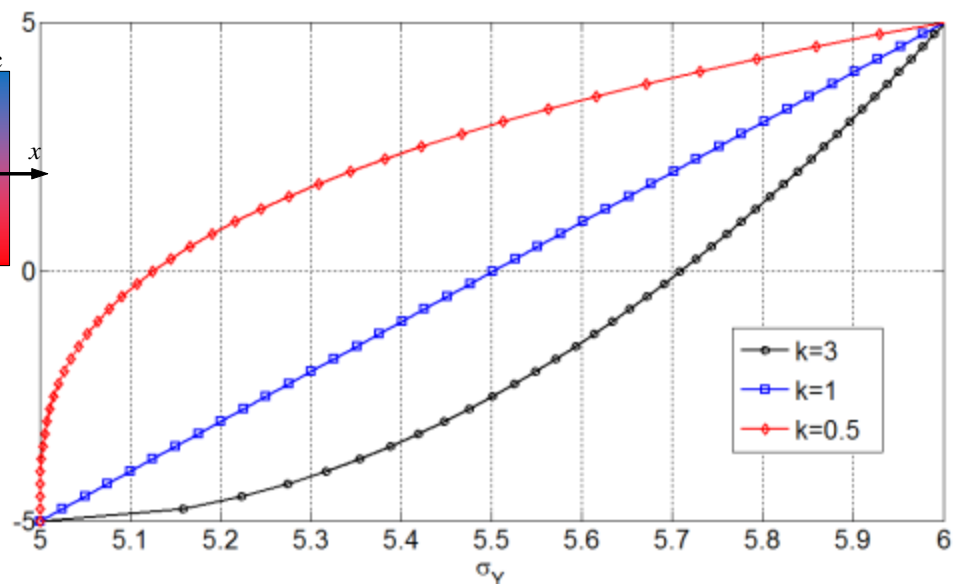
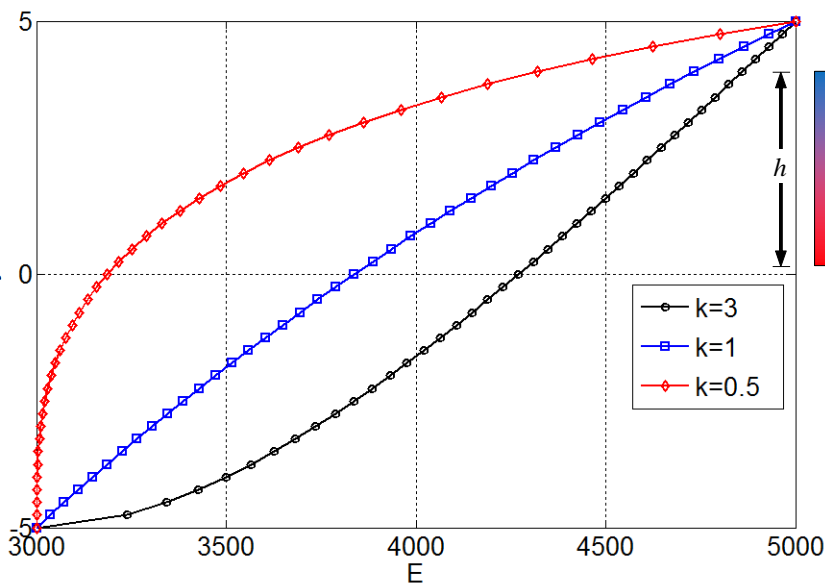
$$\nu_m = 0.25$$

$$E_m^h = 500 \text{ kN/cm}^2$$

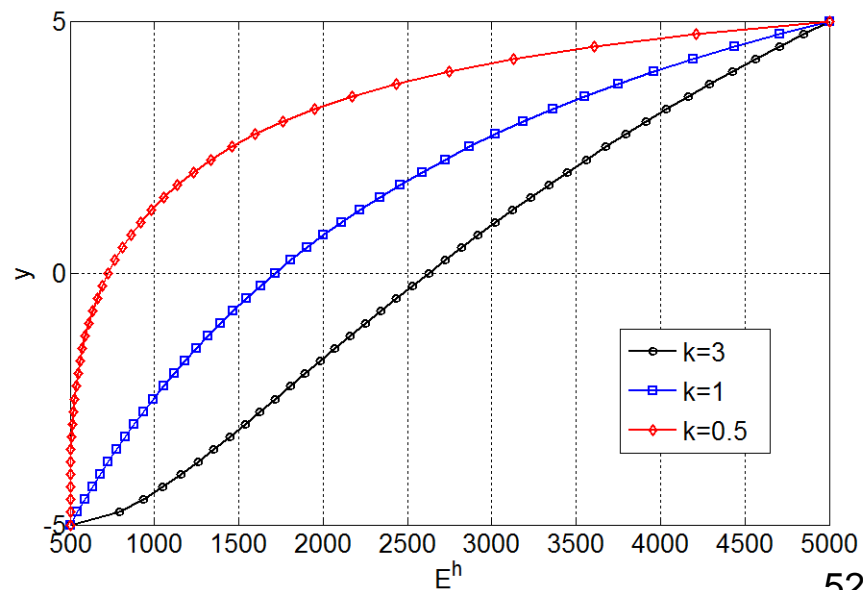
$$\sigma_{Ym} = 5 \text{ kN/cm}^2$$



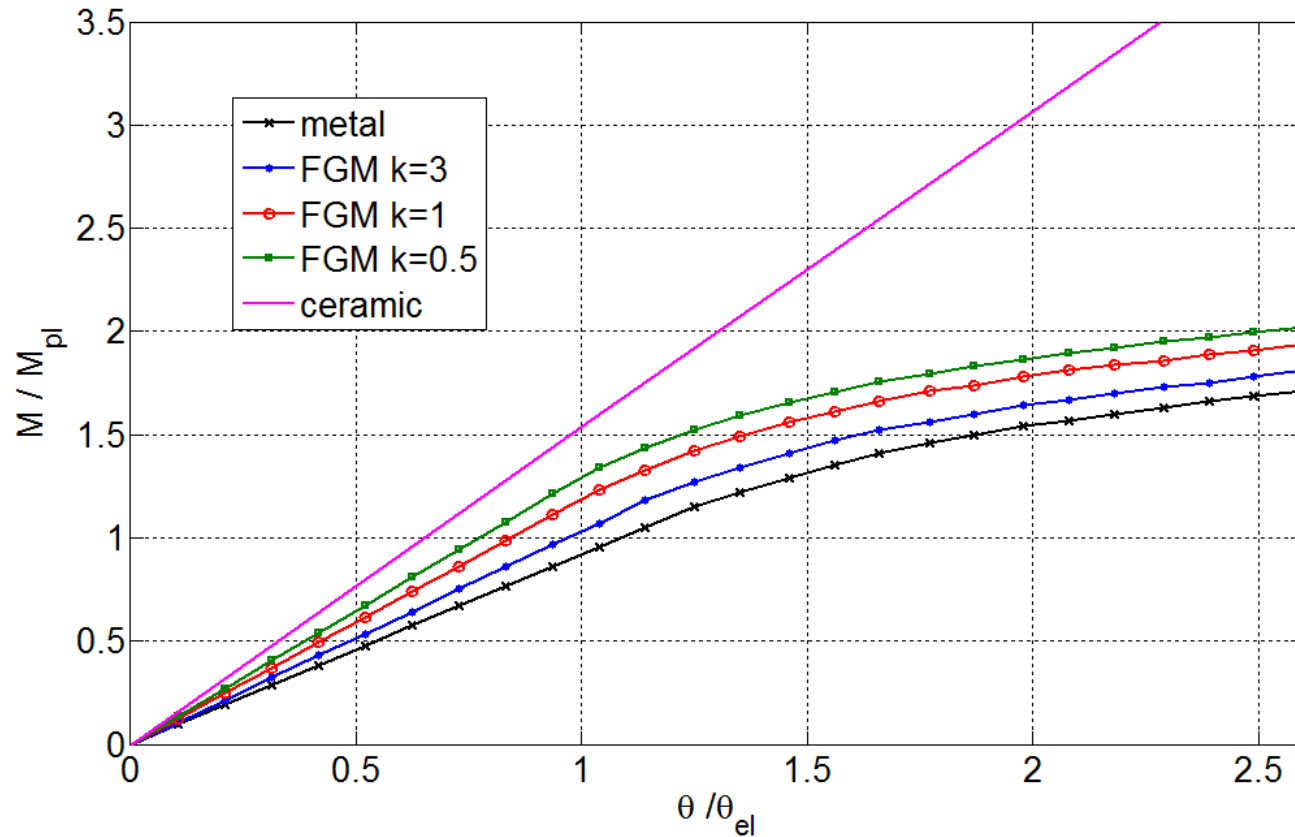
...ελαστοπλαστική ανάλυση FGM ράβδων υπό στρεπτική φόρτιση



Κατανομή του **μέτρου ελαστικότητας E** , **τάσης διαρροής σ_γ** και **μέτρου ελαστικότητας μετά τη διαρροή E^h** καθ' ύψος της διατομής για διάφορες τιμές του εκθετικού όρου.

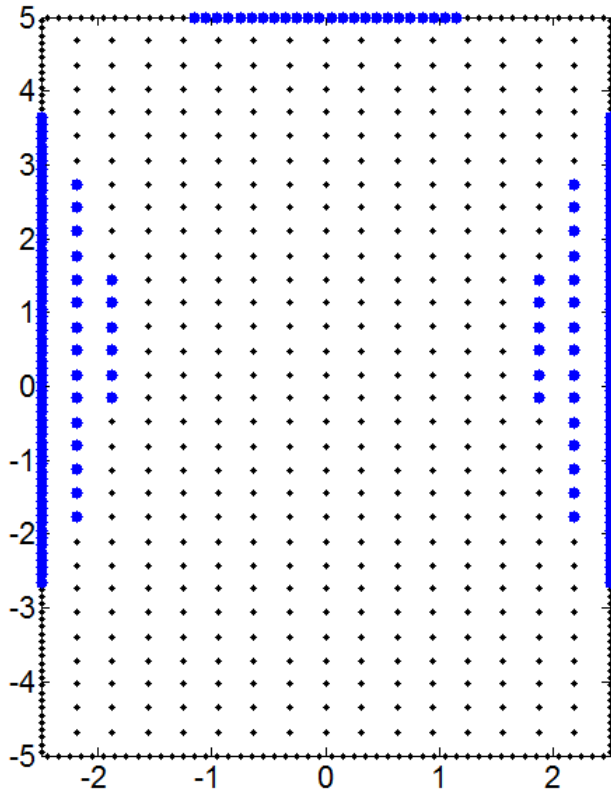


...ελαστοπλαστική ανάλυση FGM ράβδων υπό στρεπτική φόρτιση

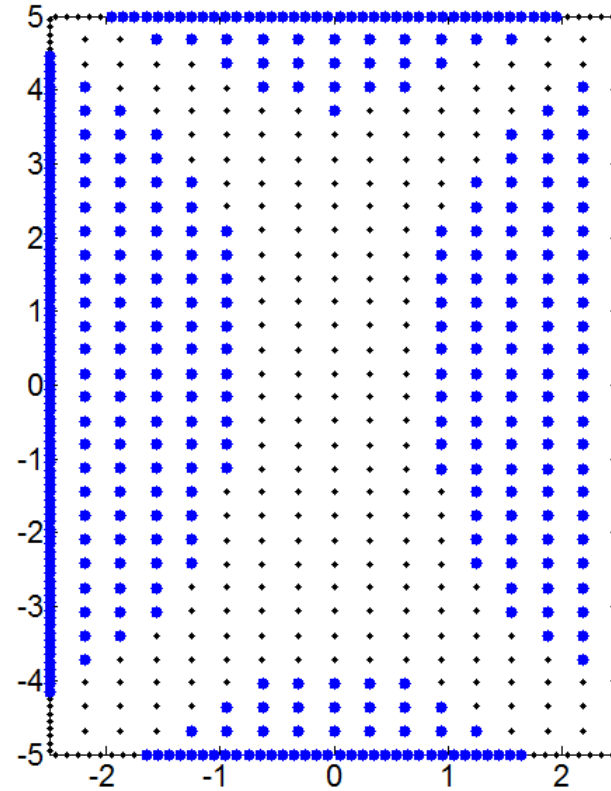


Καμπύλη στρεπτικής ροπής – στροφής

...ελαστοπλαστική ανάλυση FGM ράβδων υπό στρεπτική φόρτιση



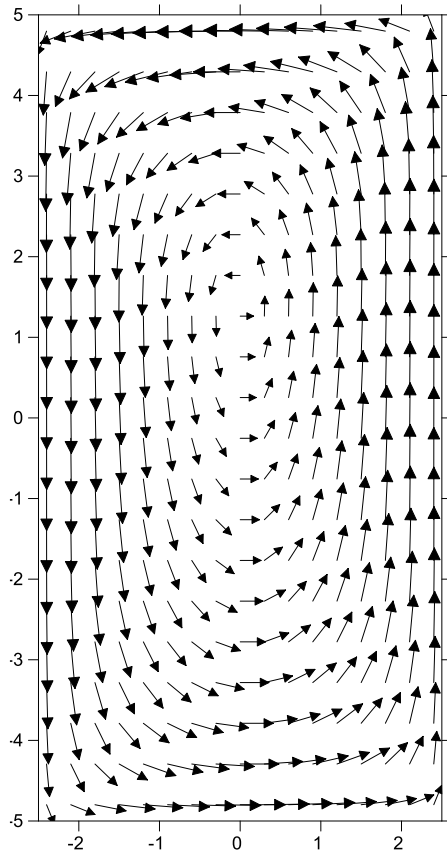
$$\theta/\theta_{el}=1.25$$



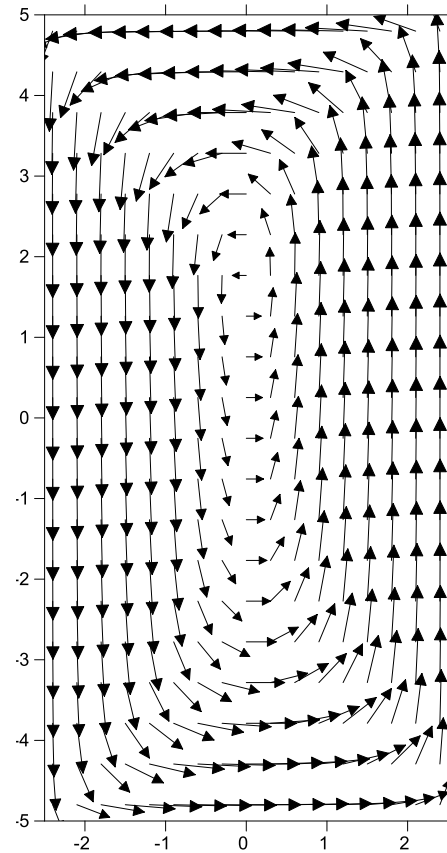
$$\theta/\theta_{el}=2.60$$

Πλαστικές περιοχές της FGM ράβδου ($k=1$) για διάφορες τιμές τη γωνίας θ .

...ελαστοπλαστική ανάλυση FGM ράβδων υπό στρεπτική φόρτιση



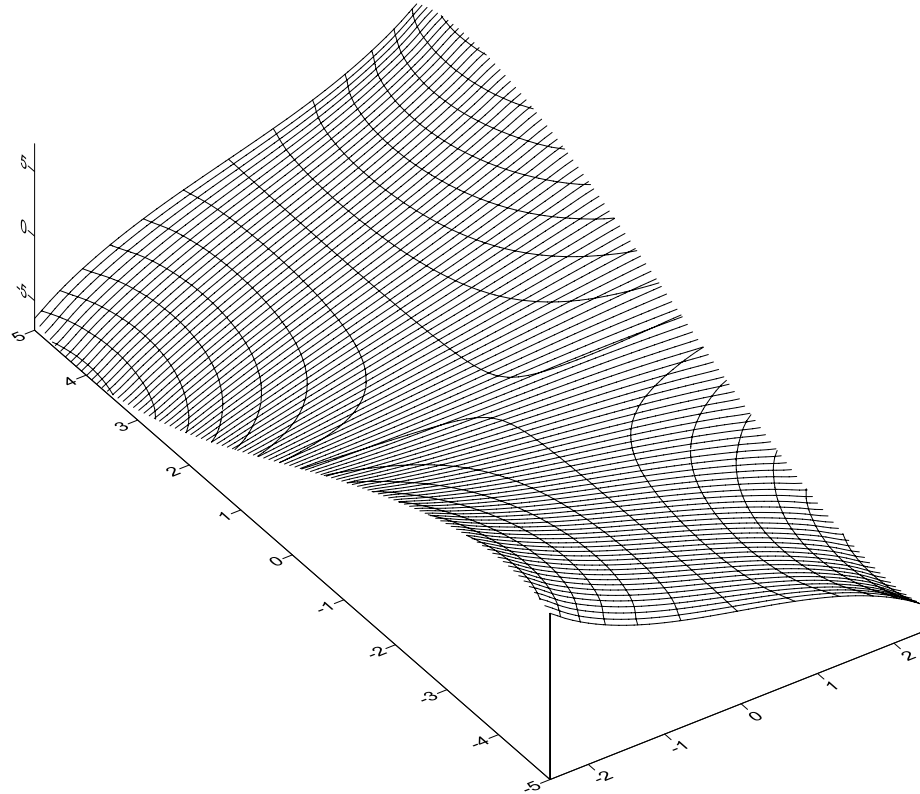
$$\theta/\theta_{el}=1.25$$



$$\theta/\theta_{el}=2.60$$

Διατμητικές τάσεις της FGM ράβδου ($k=1$) για διάφορες τιμές της γωνίας θ .

...ελαστοπλαστική ανάλυση FGM ράβδων υπό στρεπτική φόρτιση



Συνάρτηση στρέβλωσης της FGM ράβδου ($k=1$) για $\theta/\theta_{el}=2.60$

Ευχαριστώ πολύ για την προσοχή σας !!!

Διάλεξη στο 26^ο Θερινό Σχολείο – Συνέδριο
«Δυναμικά Συστήματα και Πολυπλοκότητα»
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 14-20/7/2019